PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1915. 16. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 21 am 30. Oktober 1915.

INHALT:

Originalmitteilungen:
D. Konstantinowsky, Zur Theorie der Berechnung der Steig- und Fallversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung. S. 369.
A. Schidlof, Über die Eigenschaften kleiner Tröpfchen aus reinem Quecksilber. S. 372.
M. v. Smoluchowski, Nachtrag zur Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung. S. 375.
K. Uller, Die Spannungen im elektromagnetischen Felde. S. 376.
W. Voigt, Über das Dopplersche Prinzip. S. 381.
Besprechungen:
A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik. III. S. 387.
A. L. Hughes, Die Lichtelektrizität. S. 387.
G. Bruhat, Recherches expérimentales et théoriques sur les corps possédant une dispersion anomale du pouvoir rotatoire moléculaire. S. 387.
Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker. S. 387.
Personalien. S. 388.
Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1915/16 S. 388.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Theorie der Berechnung der Steig- und Fallversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung.

(Ein Beitrag zur Frage der Existenz des Elementarquantums der Elektrizität im Anschlusse an die Abhandlung v. E. Schrödinger.[1])

Von D. Konstantinowsky.

F. Ehrenhaft[2]) hat eine Methode zur Bestimmung sehr kleiner Kräfte — 10^{-9} bis 10^{-12} Dyne — angegeben und 1909 zur Bestimmung von Radien und Ladungen submikroskopischer Partikeln verwendet, die er im widerstehenden Mittel bewegte.

Denn ließ er beispielsweise als Kräfte einmal das Gewicht der Partikeln, dann wieder der Schwere entgegenwirkende elektrische Kräfte angreifen, so ergab sich, wenn a der Radius, s das spez. Gew. der als Kugeln des verwendeten Zerstäubungsmaterials vorausgesetzten Partikeln ist[3]), ferner μ der Reibungskoeffizient des Mediums, l die mittlere molekulare Weglänge der Molekeln desselben, v_f die unter der Einwirkung der Schwerkraft erreichte Stationärgeschwindigkeit, v_e jene, welche bei einem elektrostatischen Felde $\mathfrak{E}$ entgegen der Schwere durch die der Kugel anhaftende Ladung e erzielt wurde:

$$\frac{4}{3} a^3 \pi s g = \frac{6 \pi \mu a v_f}{1 + \dfrac{1{,}63 \dfrac{l}{a}}{2 - f}} \qquad (1)$$

$$0 < f < 1.$$

$$e \mathfrak{E} = \frac{6 \pi \mu a (v_e + v_f)}{1 + \dfrac{1{,}63 \dfrac{l}{a}}{2 - f}} \qquad (2)$$

Mit Hilfe der vorstehend verwendeten Widerstandsformeln von Stokes-Cunningham können aus den beobachteten v_e und v_f, a und e gerechnet werden.

Eine zweite Berechnungsart gestattet nach Einstein-de Broglie-Weiß[1]) unter Zugrundelegung der Steig- und Fallgeschwindigkeiten des Partikels aus den Abweichungen der Passagezeiten t_i von der — gedachten — wahren Passagezeit t_w über eine bestimmte Beobachtungsstrecke l, Masse und Ladung der beobachteten Partikel anzugeben; unter wahrer Passagezeit t_w ist dann jene Zeit gemeint, in welcher das Partikel die Strecke l ohne Störung durch die Brownsche Bewegung, wie sie durch die sich nicht mehr kompensierenden Molekelstöße des Mediums hervorgerufen werden, zurücklegen würde.

$$m g = \frac{2 R T}{N \cdot \overline{\lambda^2}} v_f, \qquad (3)$$

$$e \mathfrak{E} = \frac{2 R T}{N \cdot \overline{\lambda^2}} (v_f + v_e), \qquad (4)$$

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 289, 1915.
2) F. Ehrenhaft, Wien. Ber. **118**, IIa, März 1909; diese Zeitschr. **11**, 619, 940, 1910; **12**, 94, 261, 1911; **15**, 952, 1914; **16**, 227, 1915.
3) Bezüglich des Nachweises hierfür vgl. F. Ehrenhaft, l. c.; ferner Wien. Ber. **119**, IIa, Mai 1910; C. R. t. 158, 1071; Wien. Ber. **123**, IIa, 1914; D. Konstantinowsky, Wien. Ber. **123**, IIa, 1724, 1914; R. Gans, Ann. d. Phys. **37**, 881, 1912; **47**, 270, 1915.

1) de Broglie, diese Zeitschr. **11**, 33, 1910; E. Weiß, Wien. Ber. **120**, IIa, 1021, 1911; K. Przibram, diese Zeitschr. **13**, 106, 1912; H. Fletcher, Phys. Review **33**, 82, 1911, August Nr. 2.

$$\overline{\lambda^2} = v^2 \frac{1}{n} \sum_1^n i \frac{(t_w - t_i)^2}{t_i}, \tag{5}$$

$$v = \frac{l}{t_w}. \tag{6}$$

Dabei bedeuten: N die Loschmidtsche Konstante, R die Gaskonstante, T die absolute Temperatur, n die Zahl der beobachteten Passagezeiten t_i, $\overline{\lambda^2}$ eine die Brownsche Bewegung des Partikels charakterisierende Konstante, das mittlere sekundliche Verschiebungsquadrat. In diesem Falle ist eine Voraussetzung über Form und Dichte der beobachteten Partikeln nicht eingeführt.

Für t_w, jene gedachte Fall- bzw. Steigzeit, je nach dem Einflusse des bloßen Gewichts mg oder der senkrecht nach oben wirkenden elektrischen Kräfte $e\mathfrak{E}$, nimmt E. Weiß[1]:

$$t_w = t_m$$

$$t_m = \frac{1}{n} \sum_1^n i\, t_i, \tag{7}$$

während H. Fletcher[2])

$$t_w + \frac{t_w^2 \overline{\lambda^2}}{2 l^2} = t_m \tag{8}$$

angibt.

Eine zweite Methode zur Bestimmung der Größenordnung eines solchen kleinen Partikels hat neuerdings F. Ehrenhaft[3]) aus der Farbe des bei der Dunkelfeldbeleuchtung senkrecht zum Inzidenzstrahle des beleuchtenden Systems abgebeugten Lichtes, also auf rein optischer Grundlage entwickelt; diese stellt zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit und Gültigkeit der beiden erwähnten Rechenwege insofern dar, als sie in den Größenordnungen 10^{-5} bis 10^{-6} cm Radius, in welchen die beiden vorerwähnten Rechenwege bereits Differenzen aufweisen, mit dem Widerstandsgesetze von Stokes-Cunningham gut übereinstimmt, also dieses bestätigt, während der Weg nach der Brownschen Bewegung zu große Resultate liefert, eine Tatsache, die sich bereits von anderen Gesichtspunkten aus ergeben hatte[4]). Damit wird ein neuerlicher Nachweis der Richtigkeit der von den Widerstandsgesetzen geforderten Voraussetzungen zu den bereits früher gefundenen Belegen hinzugefügt.

Da aber in früherer Zeit die Ansicht vielfach verbreitet war, daß die Ladungen, welche aus den Widerstandsgesetzen errechnet werden und welche das sogenannte Elementarquantum der Elektrizität (um 4 bis $5 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einh.) vielfach um Größenordnungen unterschritten, sich nach der Berechnung aus der Brownschen Bewegung mit dem Elektron in Einklang bringen lassen würden[1]); da ferner auch H. Fletcher, auf der Grundlage dieses zweiten Weges mit der von ihm abgeleiteten Korrektur (8) rechnend, tatsächlich derartige Resultate publizierte[2]), schien es mir in meiner Abhandlung Wien. Ber. **123**, IIa, 1714 wichtig, trotz der erwiesenen Anwendbarkeit der Widerstandsgesetze, auch nach der Brownschen Bewegung zu rechnen. Dabei mußte ich aus den erwähnten Gründen auch die Fletchersche Korrektur zugrunde legen, obwohl sich mir bereits bestimmte Anhaltspunkte für deren Unrichtigkeit ergeben hatten, in der Absicht, eine vollständige Theorie der Zeitenverteilung des geschilderten Experiments zu rechnen[3]), bzw. eine Verbesserung der Fletcherschen Korrektur vorzunehmen, woran ich durch die seitdem eingetretene Mobilisierung gehindert wurde. Durch die aber inzwischen erschienenen eleganten Rechnungen E. Schrödingers[4]), welchem es gelungen ist, das erwähnte Problem zu lösen, bin ich dieser Aufgabe nunmehr enthoben.

Die Korrektur H. Fletchers schien mir damals aus folgender Überlegung als unrichtig. Ein Partikel habe unter dem Einfluß einer bestimmten Kraft K die Geschwindigkeit

$$v = \frac{l}{t_w} \tag{9}$$

erreicht; dann ist der von der Kraft K zu überwindende Widerstand:

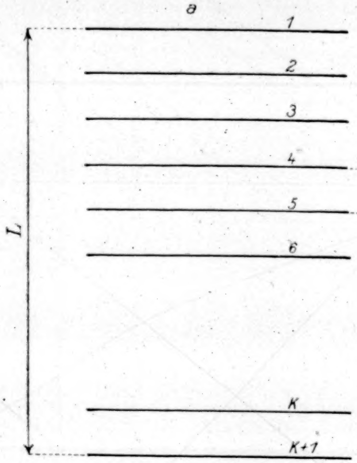
$$K = \frac{2RT}{N \cdot \overline{\lambda^2}} v. \tag{10}$$

Die geschilderte Bewegung des Partikels wird demnach durch die Angabe von $\overline{\lambda^2}$, der für die Brownsche Bewegung charakteristischen Größe, und v bzw. durch die Angabe eines t_w zu einer bestimmten Strecke l gegeben sein. Es wird demnach auch die mittlere Passagezeit t_m [vgl. (7)] als Funktion dieser Parameter der Bewegung ausdrückbar sein:

$$t_m = f(t_w, l, \overline{\lambda^2}). \tag{11}$$

1) l. c.
2) l. c.
3) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914.
4) F. Ehrenhaft, l. c.; D. Konstantinowsky, l. c.; historisch von Interesse F. Ehrenhaft, Wien. Ber. CXVI, IIa, 1175, 1907.

1) J. Perrin, C. R. t. 152, 1166; E. Weiß, Wien. Ber. **120**, IIa, 1021; vgl. den Bericht der Réunion tenue à Bruxelles sous les auspices de M. Solvay 1911: La théorie du rayonnement et les quanta; erschienen bei Gauthiers-Villars, Paris, p. 249. (Deutsch von A. Eucken, Halle 1914.)
2) l. c. Vgl. hierzu F. Zerner, diese Zeitschr. **16**, 10, 1915, welcher aus den Versuchsdaten Fletchers namhafte Unterschreitungen des Elektronenwertes rechnet.
3) Vgl. Anm. 1 der zitierten Arbeit, Wien. Ber. **123**, IIa, 1719.
4) E. Schrödinger, diese Zeitschr. l. c.



Das Teilchen werde über eine Strecke L (Figur) bewegt und am Registrierstreifen die Zeitpunkte festgehalten, in welchen das Teilchen, von a kommend, die Marke 1, dann die Marke 2 usw. bis $k+1$ zum erstenmal berühre. Die Zeit zwischen der ersten und letzten Registrierung ist offenbar eine Passagezeit T_i über die Strecke L; werden die Marken äquidistant gedacht, so stellen die einzelnen Zwischenzeiten Passagezeiten über die Strecke $l = \frac{L}{k}$ dar. Denkt man sich viele — n — solcher Messungen ausgeführt, so ist:

$$T_m = \frac{1}{n} \sum_1^n {}_i\, T_i = \frac{1}{n} \sum_1^n {}_i \sum_1^k {}_s\, t_{i,s} = \sum_1^k {}_i\, t_m = k t_m,$$

denn alle Passagezeiten t werden unter den gleichen Bedingungen gemessen. Nach (9) und (11) ist folglich:

$$k t_m = f(k t_w,\ k l,\ \overline{\lambda^2}),$$

d. h. t_m eine homogene lineare Funktion von t_w und l; es muß daher

$$t_m = t_w\, \varphi\, (v, \overline{\lambda^2}) \qquad (12)$$

sein; da die Fletchersche Korrekur (8) dieser Gleichung nicht genügt, kann sie nicht richtig sein.

Damit auf beiden Seiten von (12) auch Dimensionsgleichheit herrsche, muß $\varphi\,(v, \overline{\lambda^2})$ eine dimensionslose Konstante der betrachteten Bewegung sein. Da nun v die Dimension $[l \cdot t^{-1}]$, $\overline{\lambda^2}$ aber $[l^2 \cdot t^{-1}]$ hat, ist es nicht möglich, aus beiden einen physikalischen Ausdruck zu bilden, der dimensionslos wäre; es muß also φ eine von der speziellen Bewegung unabhängige Konstante c sein:

$$t_m = c\, t_w. \qquad (13)$$

Für makroskopisch große Kugeln, d. i. bei $\overline{\lambda^2}$ nahezu gleich 0, ist $t_m = t_w$, also muß allgemein:

$$t_m = t_w \qquad (14)$$

sein; damit ist zugleich die Richtigkeit der Einstein-de Broglie-Weißschen Formeln 3—7 erwiesen.

E. Schrödinger kam in der vorzitierten Abhandlung unter anderem in seinen Formeln 23 bis 25 zu dem gleichen Resultate[1]); seine Berechnungen stellen aber auch insofern eine Grundlage der Rechenmethode nach der Brownschen Bewegung dar, als sie die Möglichkeit bieten, die Fehler, welche den beobachteten Parametern $\overline{\lambda^2}$ und v im Mittel anhaften, zu bestimmen.

Für die nach den Formeln (5), (6) und (8) ausgeführten Berechnungen H. Fletchers, F. Zerners und die meinen ergeben sich folgende Gesichtspunkte[2]):

Aus (6), (7) und (9) ist ersichtlich, daß die Geschwindigkeiten v nach Schrödinger-Weiß kleiner werden als nach der falschen Formel Fletchers. Demnach werden Radius und Ladung nach (1) und (2) aus den Widerstandsgesetzen noch kleiner; die Unterschreitungen des Elektronenwertes werden also, allerdings nur um unbedeutende Beträge, weitgehender.

Der Gang der Resultate aus der Brownschen Bewegung ist im voraus aus den Formeln (3) bis (5) nicht sicher zu übersehen; die Durchrechnung ergibt die Resultate der Tabelle:

Protokoll-Nr.	Widerstandsgesetz		Brownsche Bewegung	
	Radius $a \cdot 10^6$ cm	Ladung $e \cdot 10^{+10}$ elektrost. Einh.	Ladung $e \cdot 10^{+10}$ elektrost. Einh.	Mittl. Fehler der Ladung 10^{+10} elektrost. Einh.
Au I	4,6	0,09	2,2	+ 0,6
„ II	3,7	0,07	1,2	+ 0,5
„ III	9,3	0,73	2,3	± 0,5
„ IV	6,6	0,14	0,90	+ 0,2
„ V	8,6	0,26	1,8	+ 0,6
„ VI	3,7	0,21	4,0	+ 0,4
„ VII	10,8	0,055	0,50	+00,8
„ VIII	6,2	0,06	3,60	± 0,5
„ IX	3,3	0,58	—	—
„ X	3,6	—	—	—
„ XI	3,8	1,0	—	—
„ XII	6,3	1,65	3,8	± 0,6
„ a	3,9	0,06	—	—
Hg I	7,0	1,1	3,2	+ 0,6
„ II	2,0	0,1	2,9	± 0,5

1) Aus der Formel (5) dieser Abhandlung gelangt man durch eine einfache Umformung zur entsprechenden (23) Schrödingers.

2) F. Ehrenhaft hatte sich bekanntlich der korrekten Berechnungsart angeschlossen und die Fletchersche Korrektur nicht in Erwägung gezogen; aber auch die auf

welche zeigt, daß die Brownsche Bewegung auch im allgemeinen noch kleinere Resultate für die Ladungen ergibt, als die l. c. publizierten.

Die Erkenntnis der Unterschreitung des Elektronenwertes ist aber insofern wieder um einen Schritt vorwärts gekommen, als es nunmehr nach E. Schrödinger gelingt, die mittleren Fehler der Resultate abzuschätzen. Aus der entsprechenden Kolonne der Tabelle kann man die Bedeutungslosigkeit der Fehler für die oben erwähnte meritorische Frage entnehmen.

Es ergeben sich demnach als Schlußfolgerungen:

1. Für die bereits früher von allen übrigen Autoren zur Berechnung der Konstanten der Brownschen Bewegung aus der Passagezeitenbeobachtung über eine bestimmte Strecke angewandte Formel wird ein einfacher Beweis gegeben; die von Fletcher vorgenommene Korrektur an der Berechnungsart ergibt sich übereinstimmend mit Schrödinger als unrichtig[1]).

2. Wendet man diese neuerdings auf ein theoretisch gesichertes Fundament gestellten Formeln auf die Beobachtungen in Wien. Ber. **133**, IIa, 1714 an, so ergeben sich im wesentlichen dieselben namhaften Unterschreitungen des Wertes des Elektrons bis in die Ordnung 10^{-11} elektrost. Einh., selbst wenn man die zu große Werte liefernde Brownsche Bewegung zugrunde legt.

3. Bestimmt man ferner nach Schrödinger als Maßstab der erzielten Genauigkeit der Resultate den mittleren Fehler derselben unter Zugrundelegung der Formeln 29 und 30 seiner zitierten Abhandlung, so ersieht man, daß die Genauigkeit groß genug ist, um die unter 2. erwähnten Unterschreitungen vollkommen sicherzustellen.

4. Die nach allen Erfahrungen richtigen und auch mit dem optischen Wege F. Ehrenhafts übereinstimmenden Resultate aus den Widerstandsgesetzen ergeben Unterschreitungen bis zum 80. Teile des Elektrons; die sich in diesem Falle errechnenden mittleren Fehler kommen gegenüber dem Inhalt der Resultate nicht in Betracht.

---

diese Art sich errechnenden Ladungen blieben weit unter denjenigen des Elektrons.

1) Anmerkung bei der Korrektur: vgl. auch die in Heft 17/18 1915 dieser Zeitschrift neuerdings erschienene Arbeit von M. v. Smoluchowski.

(Aus dem I. phys. Institute der Univ. Wien.) derz. Scheinwerferabteilung.

(Eingegangen 22. September 1915.)

Über die Eigenschaften kleiner Tröpfchen aus reinem Quecksilber.

(Bemerkungen zu Prof. Ehrenhafts Abhandlung „Über kleinste Quecksilberkugeln".)

Von A. Schidlof.

In einer letzthin veröffentlichten Abhandlung[1]) ist Herr Prof. Ehrenhaft auf den vor einiger Zeit entstandenen Widerspruch zwischen seinen Anschauungen und unseren Versuchsergebnissen[2]) zurückgekommen. Da gewisse in dieser Abhandlung enthaltene Bemerkungen bei den Herren Fachgenossen falsche Vorstellungen erwecken könnten, muß ich nun auch meinerseits mich nochmals mit dieser Frage beschäftigen.

Herr Prof. Ehrenhaft ist gegenwärtig mir gegenüber insofern im Vorteil, als eine ausführliche Beschreibung unserer Versuche bisher noch nicht veröffentlicht worden ist. Diese Lücke wird nun in der allernächsten Zeit durch eine von Herrn Targonski in den Archives des sciences physiques et naturelles (Genf) erscheinende Abhandlung ausgefüllt werden. Auf diese Arbeit, sowie auf die ungefähr gleichzeitig zu veröffentlichenden Berichte über unsere Beobachtungen an sehr kleinen Öltröpfchen und an Quecksilberkügelchen möchte ich vor allem hier aufmerksam machen. Ferner muß ich Prof. Ehrenhafts Angaben über meinen Standpunkt zu dieser Frage berichtigen. Die Behauptung, daß der Gedankenaustausch zwischen Prof. Ehrenhaft und mir ursprünglich auf eine viel breitere Basis gestellt war, als dies aus der letzten Abhandlung ersichtlich ist, muß auf einem Mißverständnis beruhen. Um weiteren Mißverständnissen vorzubeugen, will ich zunächst meine Meinung kurz und klar aussprechen. Meines Erachtens haben sowohl Prof. Ehrenhaft als auch Herr Konstantinowsky ihre Beobachtungsresultate unrichtig gedeutet.

Diese Vermutung ist für mich durch die neuerliche Feststellung, daß die Eigenschaften des mechanisch zerstäubten Quecksilbers von denen des elektrisch zerstäubten vollkommen verschieden sind, zur Gewißheit geworden.

Im Nachfolgenden soll nun zunächst diese Ansicht begründet werden. Weiterhin werde ich mich noch mit gewissen, in Prof. Ehrenhafts letzter Abhandlung erörterten Eigenschaften unserer Versuchsanordnung beschäftigen.

---

1) F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **16**, 227, 1915.

2) A. Schidlof und A. Karpowicz, C. R. **158**, 1992, 1914; diese Zeitschr. **16**, 42, 1915.

§ 1. Der Unterschied zwischen mechanisch und elektrisch zerstäubtem Quecksilber.

Es fehlt hier der Platz über die von Herrn Targonski ausgeführten Untersuchungen der Eigenschaften von Tröpfchen aus reinem und aus amalgamiertem Quecksilber zu berichten. Diesbezüglich muß ich auf die schon oben erwähnte Originalabhandlung verweisen. Ich muß mich auch auf die bloße Erwähnung der Tatsache beschränken, daß es Herrn Targonski gelungen ist, sehr bedeutende Unterschreitungen der Elementarladung dadurch festzustellen, daß er Quecksilber nach der Ehrenhaftschen Methode (elektrisch) zerstäubte. So bekam er Partikeln von unveränderlicher Masse, die, nach den von Prof. Ehrenhaft aufgestellten Grundsätzen berechnet, Subelektronen ergaben. Da diese durch elektrische Zerstäubung erzeugten Teilchen sämtliche von Prof. Ehrenhaft beschriebenen Eigenschaften zeigten, kann wohl kein Zweifel bestehen, daß sie mit den Ehrenhaftschen „kleinsten Quecksilberkugeln" identisch sind. Zu ihrer Beobachtung braucht man aber kein Mikroskop und keine größeren Aperturen als die, welche uns hier zur Verfügung stehen.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung sind in der nachfolgenden Tabelle, welche der Abhandlung des Herrn Targonski entlehnt ist, zusammengestellt.

Quecksilber

mechanisch zerstäubt.	elektrisch zerstäubt.
1. Berechnetes Elementarquantum der Elektrizität: $4{,}68 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. E. (A. Targonski).	1. Subelektronen (F. Ehrenhaft, A. Targonski).
2. Die kleinste Ladung ist konstant, hängt also nicht von den Dimensionen der Partikeln ab.	2. Die kleinste Ladung nimmt mit den Dimensionen der Partikeln ab.
3. Die nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze unter der Annahme der Dichte des Quecksilbers berechneten Halbmesser stimmen mit den nach der Brownschen Bewegung berechneten ungefähr überein.	3. Es besteht keinerlei Übereinstimmung zwischen den nach dem Stokes-Cunninghamschen Gesetze einerseits unter Annahme der Dichte des Quecksilbers anderseits nach der Brownschen Bewegung berechneten Halbmesser.
4. Veränderliche Masse und in gewissen Fällen veränderliche Dichte (oder Gestalt).	4. Unveränderliche Masse, Dichte und Gestalt.
5. Die Beweglichkeit der Teilchen wächst, wenn der (nach Stokes-Cunningham) berechnete Halbmesser abnimmt.	5. Die Beweglichkeit der Teilchen nimmt mit dem (nach Stokes-Cunningham) berechneten Halbmesser ab.

§ 2. Über die Unwahrscheinlichkeit einer beim mechanischen Zerstäuben auftretenden Wasserkondensation.

Der Ausgangspunkt meiner Besprechung der Schlußfolgerungen Prof. Ehrenhafts war die Annahme, daß die Ehrenhaftschen Partikeln nicht die Dichte des Quecksilbers haben dürften. Der Unterschied zwischen den mechanisch zerstäubten und den im Lichtbogen hergestellten Partikeln ist so handgreiflich, daß gar kein Zweifel über die Verschiedenheit ihrer Zusammensetzung bestehen kann. Da nun Prof. Ehrenhafts Überzeugung von der Reinheit seines Materials unerschütterlich feststeht, so muß er logisch konsequent folgern, daß die beim mechanischen Zerstäuben beobachteten, veränderlichen Teilchen nicht Quecksilbertröpfchen sein können. Allerdings ergibt sich daraus auch weiter, daß die von Millikan, Fletcher und anderen Beobachtern in der gleichen Weise hergestellten Tröpfchen nicht die von diesen Autoren vorausgesetzte Zusammensetzung haben können. Da nun Herr Prof. Ehrenhaft sich nicht entschlossen hat, diese Folgerung zu ziehen, drängt sich mir die Vermutung auf, daß er seine Annahme, mechanisches Zerstäuben bewirke Wasserkondensation, nicht ganz ernst nimmt.

Für Prof. Ehrenhaft kamen allerdings in erster Linie die von uns beschriebenen Quecksilbertröpfchen in Betracht, und es galt, ihre Existenz in irgendwelcher Weise problematisch zu machen. Woraus können flüchtige Tröpfchen, die beim Zerstäuben von Quecksilber beobachtet werden, bestehen? Erwägt man diese Frage ohne jede Voreingenommenheit, so kann keine andere flüchtige Flüssigkeit in Betracht kommen als die, welche eben zerstäubt wird, also Quecksilber. Dennoch behauptet Prof. Ehrenhaft, wir hätten Wassertröpfchen beobachtet.

Wie wenig Wahrscheinlichkeit diese An-

nahme hat, geht aus nachfolgendem einfachen Versuch hervor: Während wir Quecksilber zerstäubten, brachten wir ein Thermometer mit ganz kleinem Behälter nahe an die Öffnung des Zerstäubers in den Strahl der Quecksilbertröpfchen oder auch daneben. Dabei konnten wir nicht die geringste Temperaturänderung bemerken. Da nun in unseren Laboratoriumsräumen der Feuchtigkeitsgrad der Luft niemals größer ist als 0,5, meistens aber bedeutend kleiner, scheinen Wasserkondensationen, denen lokale Temperaturdifferenzen von mehr als 10 Grad entsprechen würden, ganz unmöglich. Sollten sie aber doch auftreten, so würden die Wassertröpfchen oder die Kondensationsnebel den Kondensator nie erreichen.

Die bloße Annahme von Kondensationsnebeln ist übrigens für Prof. Ehrenhafts Zweck unzureichend. Es handelt sich darum zu beweisen, daß wir niemals Quecksilbertröpfchen beobachtet haben, während Quecksilber in großen Mengen zerstäubt wurde und sich im Kondensator ansammelte. Daß man bei Prof. Millikans Quecksilbertröpfchen die Flüchtigkeit nicht im gleichen Maße bemerkt, wie bei den unseren, beweist nichts, weil diese Tropfen viel zu groß waren, als daß die Erscheinung während der kurzen Dauer der Versuche erkennbar werden konnte. So große Tropfen konnten wir mit der uns zur Verfügung stehenden Batteriespannung gar nicht halten. Prof. Millikan macht übrigens[1]) die Anmerkung, daß die meisten von ihm zerstäubten Flüssigkeiten flüchtig waren. Um völlig unveränderliche Öltropfen zu erzeugen, benutzte er eine ganz besondere Art zähen Maschinenöls. In welcher Hinsicht unsere Angaben denen aller anderen Autoren (von Herrn Prof. Ehrenhaft abgesehen) widersprechen, sehe ich nicht ein.[2])

Daß die von uns beobachteten Partikeln tatsächlich Quecksilbertröpfchen sind, geht daraus hervor, daß die Berechnung der Beobachtungsresultate unter Annahme der Dichte des Quecksilbers richtige Werte für die elektrische Elementarladung ergibt, und daß der unter Annahme der Dichte des Quecksilbers berechnete Halbmesser der Tröpfchen mit dem aus der Brownschen Bewegung abgeleiteten übereinstimmt.

Prof. Ehrenhaft wird allerdings die Gültigkeit dieser Argumente nicht anerkennen. Vielleicht finden sich aber andere Physiker, deren Glaube an die Existenz des Elektrons und die wenigstens angenäherte Gültigkeit der Einsteinschen Theorie der Brownschen Bewegung noch nicht erschüttert ist. Diese werden wohl geneigt sein, Prof. Ehrenhafts Annahme von Wassernebelbildung beim mechanischen Zerstäuben als eine haltlose Vermutung anzusehen.

§ 3. Über die bei unseren Versuchen benützte Optik.

Es kommt mir ferner darauf an, Prof. Ehrenhafts Angaben über unsere optische Anordnung zu widerlegen. Vor allem ist zu bemerken, daß seine Annahmen über die von uns benützten Aperturen willkürlich und tatsächlich unrichtig sind. Prof. Ehrenhaft setzt voraus, daß wir kreisförmige Fenster haben, deren Halbmesser 0,25 cm beträgt. In Wirklichkeit ist unser Kondensator mit rechteckigen Öffnungen versehen, deren Höhe 0,5 cm und deren Breite 3 cm beträgt. Allerdings kann die ganze Breite der Öffnungen nicht ausgenützt werden. Das die Lichtstrahlen sammelnde Objektiv hat nämlich einen Durchmesser von bloß 2,5 cm und steht 8 cm vom Kondensatormittelpunkt ab. Berechnet man nach diesen Angaben die mittlere Beleuchtungsapertur, so findet man 0,1, also zweimal mehr als Prof. Ehrenhaft annimmt.

Was die Beobachtungsapertur betrifft, so ist sie wegen des 25 cm weit von den beobachteten Körperchen abstehenden Fernrohrobjektivs nur um weniges größer als Prof. Ehrenhaft angesetzt hat. Lassen wir aber auch seine diesbezügliche Annahme gelten, so ist doch sein Endresultat auf alle Fälle zweimal zu groß.

Zu seiner Rechnung benützt Prof. Ehrenhaft eine Formel von Siedentopf und Zsigmondy[1]), nach welcher der Halbmesser r eines ultramikroskopisch gerade noch wahrnehmbaren kugelförmigen Teilchens ausgedrückt ist durch:

$$r = \frac{n}{2a_1a_2}\sqrt{\frac{2g}{\pi \cdot k}}.$$

Es bedeuten in dieser Formel n den Brechungsexponenten des Mediums (hier gleich 1), a_1 und a_2 die zur Beleuchtung und zur Beobachtung verwendeten Aperturen, g die mittlere Empfindlichkeitsgrenze des Auges, k die spezifische Intensität der Strahlung des gleichsam selbstleuchtend gedachten Teilchens. Für g und k nimmt Prof. Ehrenhaft, dem Beispiel der Autoren folgend, $g = 10^{-8}$ Meterkerzen und $k = 10^5$ Meterkerzen/cm².

1) R. A. Millikan, Phys. Rev. **32**, 349, 1911.

2) Das von Millikan (loc. cit.) angegebene *Hg*-Tröpfchen, für das die Beobachtungsdaten in der Tab. XVI zusammengestellt sind, ist entschieden flüchtig. Die Falldauern zeigen zwar keine Zunahme, was bei der kurzen Beobachtungsdauer (es wurden bloß 3 Beobachtungen gemacht) auch nicht möglich ist. Dagegen nehmen die Steigdauern im elektrischen Felde systematisch ganz regelmäßig ab, was mit Sicherheit auf eine stetige Massenabnahme des Tröpfchens schließen läßt.

1) Ann. d. Phys. **10**, 1, 1903.

Berechnet man nun r nach der oben stehenden Formel mit den richtigen Werten der Aperturen $a_1 = 0{,}1$ und $a_2 = 0{,}05$, so findet man $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm in genügender Übereinstimmung mit unserer Angabe, daß die verdampfenden Teilchen bei einem Halbmesser von $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm unsichtbar wurden.

Man kann dieser Übereinstimmung keine große Bedeutung beimessen. Die Siedentopf-Zsigmondysche Formel ist unter äußerst vereinfachenden Annahmen, welche dem Charakter der Beugungserscheinungen in keiner Weise Rechnung tragen, abgeleitet worden. Daß sie nicht für alle Aperturen gilt, geht schon daraus hervor, daß Sonnenstäubchen nach dieser Gleichung unsichtbar sein müßten, weil sie unter dem Öffnungswinkel Null beleuchtet werden.

Siedentopf und Zsigmondy haben die Gleichung dazu benützt, um die äußersten Grenzen der Leistungsfähigkeit der ultramikroskopischen Methode bei großen Aperturen festzustellen. Die Anwendung, welche Prof. Ehrenhaft von dieser Formel macht, scheint mir ganz unzulässig.

Auf alle Fälle können aus einer Beziehung, in welche der Schwellenwert der Empfindlichkeit des Auges eingeht, keine zwingenden Schlüsse gezogen werden.

Während in unserer letzten Abhandlung bloß behauptet wurde, daß wir Teilchen bis zum Halbmesser von $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm herunter beobachten konnten, ist es seither Herrn Targonski gelungen, verdampfende Tröpfchen bis zum Radius von $7 \cdot 10^{-6}$ cm zu verfolgen. Dieser Wert dürfte tatsächlich die untere Grenze von dem, was unser „Fernrohrsystem" leisten kann, darstellen. Obwohl er fast viermal kleiner ist, als der aus der obigen Formel berechnete Wert, kann doch kein Zweifel bestehen, daß er richtig ist. Der Radius wurde nämlich nach zwei voneinander unabhängigen Methoden, nach der Stokes-Cunninghamschen Formel unter Annahme der Dichte des Quecksilbers, und aus der Brownschen Bewegung unter Annahme des Wertes des elektrischen Elementarquantums, übereinstimmend berechnet.

Prof. Ehrenhaft hat meines Erachtens unrecht, auf das „Fernrohrsystem" verächtlich herabzusehen. So großartig auch die bei Prof. Ehrenhafts Untersuchungen angewendeten optischen Hilfsmittel sein mögen, ich habe nicht den Eindruck, daß die Vorteile des „Mikroskopsystems" bei diesen Experimenten zur Geltung gelangen können. Dagegen hat das eng begrenzte Gesichtsfeld entschieden große Nachteile.

Das Auflösungsvermögen des optischen Systems kommt ja hier überhaupt nicht in Betracht, da bloß einzelne Partikeln beobachtet werden, und über Gestalt, Größe und Dichte ultramikroskopischer Körperchen klärt uns auch das leistungsfähigste Mikroskop nicht auf.

Aus diesem Grunde scheint mir die Beweiskraft der zahlreichen schönen Mikrophotographien, die Prof. Ehrenhaft bei verschiedenen Gelegenheiten reproduziert hat, gering.

Zum Schlusse will ich bemerken, daß ich auf die weitere Fortsetzung dieses Federstreites verzichte. Nachdem ich den Herren Fachgenossen die vorangehenden ergänzenden Darlegungen über meinen Standpunkt zu dieser Frage sowie über die hier benutzte Versuchsanordnung gegeben habe, will ich nun gerne Herrn Prof. Ehrenhaft das letzte Wort lassen. Jetzt, da die wichtigsten Punkte klar gestellt sind, wird sich jeder, den der Gegenstand interessiert, durch Wiederholung der Versuche und Erwägung der Ergebnisse eine Meinung bilden können.

Physikal. Institut der Universität Genf.
September 1915.

(Eingegangen 22. September 1915.)

Nachtrag zur Notiz über die Berechnung der Brownschen Molekularbewegung bei der Ehrenhaft-Millikanschen Versuchsanordnung[1]).

Von M. v. Smoluchowski.

Nachträglich bemerke ich in No. 16 dieser Zeitschrift E. Schrödingers Arbeit (S. 289) „Zur Theorie der Fall- und Steigversuche an Teilchen mit Brownscher Bewegung", in welcher der Verfasser Resultate entwickelt, die mit den meinigen im wesentlichen übereinstimmen. Hätte ich von diesen, um einige Wochen früheren Berechnungen Schrödingers gewußt, so wäre meine Notiz wohl ungeschrieben geblieben; immerhin mögen aber die Unterschiede des Ausgangspunktes und der Darstellungsweise einiges Interesse bieten. Vielleicht können solche merkwürdige Koinzidenzen auch als Anzeichen einer Zwangsläufigkeit der wissenschaftlichen Entwicklung angesehen werden.

1) Diese Zeitschrift **16**, 318, 1915.

(Eingegangen 30. September 1915.)

Die Spannungen im elektromagnetischen Felde.

Von Karl Uller.

Einleitung. Die Begriffe von Wellenausbreitung und Wellenbau, die sich vor langer Zeit in der Physik festgesetzt hatten, sind eng und schief, wie ich in einer Folge von Abhandlungen[1]) zunächst an den wichtigsten Punkten habe nachweisen können. Sie hatten sich an einfachen Wellen entwickelt, waren aber dann unbesehen auf Wellen verwickelterer Form übertragen worden, anstatt daß man sie aus der Wellengleichung, d. i. einer Beziehung zwischen den zeitlichen und räumlichen Ableitungen des Feldvektors, und dem Energiebegriff logisch abgeleitet hätte. Nach letzterem allein zulässigen, deduktiven Verfahren erweisen sich nun, wie meine Untersuchungen lehren, Wellengeschwindigkeit und Wellenlänge keineswegs als Konstanten, als Größen, die durch die Schwingungsform der Welle und durch die Konstanten des Mediums vorgegeben sind, sondern als abgeleitete Begriffe, indem sie auch von der Spreizung des Wellennormalenpaares und auch vom Polarisationszustand der Welle, also von der Ausbreitungsform und dem Wellenbau abhängig sind!

Eine der Folgen ist, daß es im allgemeinen keinen „Brechungsexponenten" und keinen „Extinktionskoeffizienten" gibt. Diese sind nicht Naturkonstanten, sondern nur ad hoc definierte Abkürzungen, die bloß bei gestreckter Lage des Wellennormalenpaares, also bei normalem spreizlosen Einfall und im Snelliusschen Gebiet zugelassen werden können, Gebiete, die verhältnismäßig recht eng sind. Es sind somit Größen, die einen besonderen Wellenbau und einen besonderen Ausbreitungsvorgang, wie es die Brechung ist, zur Voraussetzung haben. Überdies sind es Abkürzungen, die einer theoretischen Ausdeutung schwer oder gar nicht zugänglich sind. Als Naturkonstanten des Körpers gegenüber der Welle treten zwei andere Größen auf, die ich als erste und zweite Wellenkonstante bezeichne, Größen, die in jeder Welle von bestimmter Frequenz und Dämpfung als konstant und vorgegeben zu betrachten sind und aus der Wellengleichung fließen. Sie können von Richtungen abhängen, nämlich in Körpern mit Struktur, auch können in ihnen weitere Körperkonstanten zusammentreten, wie z. B. bei elastischen sowie gewöhnlichen elektromagnetischen Wellen.

Eine vektorielle Planwelle von elementarer Schwingungsform hat die Gestalt

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2 \cdot \{\mathfrak{e} \cdot e^{i(\nu t - (\mathfrak{w}\mathfrak{r}))} + \mathfrak{e}^* \cdot e^{-i(\nu^* t - (\mathfrak{w}^*\mathfrak{r}))}\}; \qquad (1)$$

jede komplexe Größe $\mathfrak{g}$ schreibe ich durchweg in der Form $\mathfrak{g}' + i\mathfrak{g}''$ und kennzeichne mit einem Sternchen die konjugiert komplexe Größe. Der Vektor $\mathfrak{e}$ heiße der Wellenvektor und $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar; beide sind in einer Planwelle konstant. In ν bezeichnet ν' die Frequenz und ν'' die (positive oder negative) Dämpfung der Welle; letztere sei so klein, daß man noch von einer elliptischen Schwingung reden kann. In einem homogenen Medium liefert die Wellengleichung, der die Welle (1) gemäß der jeweilig zugrunde liegenden Feldtheorie zu genügen hat, stets die Beziehung

$$\mathfrak{w}^2 = a, \qquad (2)$$

worin a von der Frequenz und Dämpfung der Welle sowie von Körperkonstanten und etwaigen Strukturachsen abhängig ist. Die beiden Wellenkonstanten, a' und a'', bestimmen im Verein mit dem Spreizwinkel des Wellennormalenpaares die Beträge des Wellennormalenpaares, also das Phasen- und Amplitudengefälle. Während die erste Wellenkonstante a', die ich mitunter auch Mitschwingungskonstante nenne, keiner Beschränkung unterworfen ist, also zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen kann, schließt das Energieprinzip positive Werte der zweiten Wellenkonstante a'', die ich gelegentlich auch Schwächungskonstante nenne, aus. Insbesondere auf elektromagnetischem Gebiete geben die verschiedenen Dispersionstheorien, von dem erhöhten Gesichtspunkt aus neu entwickelt, wohl Rechenschaft von möglichen negativen Werten der a' und a''.

Berechnet man an Hand neuer Formeln auf Grund experimenteller Daten, also unabhängig von besonderen Theorien, die beiden elektromagnetischen Wellenkonstanten — wie ich es getan habe —, so macht man die erstaunliche und folgenschwere Entdeckung, daß tatsächlich negative Werte von a' vorkommen, nämlich bei Metallen und Metalloiden in gewissen Bereichen der Temperaturen und Frequenzen!

Ein anderes physikalisches Dogma lautet: Jede Lichtwelle, die auf einen Körper auffällt, übt auf ihn einen Druck aus. Auch dieses, so allgemein ausgesprochen, ist nicht haltbar. **Als logische Folge der Existenz negativer erster elektromagnetischer Wellenkonstanten ergibt sich nämlich, daß auch Zug auftreten kann! Auch gibt es Fälle, wo in Flächenelementen senkrecht zur Strahlung überhaupt keine Kräfte wirksam sind!**

1) K. Uller, Die kinematische, die physikalische Welle (Jahrb. d. drahtlosen Telegraphie 1915); K. Uller, Eine Wellenstudie (Elster-Geitel-Festschrift 1915); K. Uller, Eine Bestimmung elm. Wellenkonstanten (demnächst in den Annalen).

Im folgenden soll nun diese zweite Entdeckung entwickelt werden. Dabei finde ich Gelegenheit, auch sonstiges noch Unbekanntes anzuführen.

§ 1. Die mittleren Spannungen in einem homogenen isotropen und nicht drehenden Körper.

Für die Flächenkräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs in einer (unendlich kleinen) Flächeneinheit mit der Einheitsnormale $\mathfrak{n}$ in einem abgeschlossenen Felde machen wir die üblichen Annahmen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_e &= (\mathfrak{D}_e\mathfrak{n})\,\mathfrak{E} - (\mathfrak{D}_e\mathfrak{E})\,\mathfrak{n}/2 \\ \mathfrak{T}_m &= (\mathfrak{D}_m\mathfrak{n})\,\mathfrak{M} - (\mathfrak{D}_m\mathfrak{M})\,\mathfrak{n}/2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die wir auch für nichtstationäre Zustände als gültig ansehen, obgleich dann wahrscheinlich noch Zusatzglieder anzufügen sind. Bei elementarer Schwingungsform des elektromagnetischen Feldes ist die elektrische Feldstärke von der Form

$$\mathfrak{E} = {}^1/_2\cdot\{E\cdot e^{i\nu t} + E^*\cdot e^{-i\nu^* t}\}$$

und die elektrische Erregung von der Form

$$\mathfrak{D}_e = {}^1/_2\cdot\{D_e\cdot e^{i\nu t} + D_e^*\cdot e^{-i\nu^* t}\};$$

entsprechende Ausdrücke für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{M}$ und die magnetische Erregung $\mathfrak{D}_m$. Die Abhängigkeiten der Erregungen von den Feldstärken müssen durch atomistische Betrachtungen gewonnen werden. Selbst noch bei ziemlich tief eindringenden kommt man in homogenen isotropen und nicht drehenden Körpern bekanntlich zu Ergebnissen von der Form

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \varepsilon E \\ D_m &= \mu M. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Der elektrische Erregungskoeffizient ε fällt im allgemeinen komplex aus, wir wollen das der Allgemeinheit halber auch für den magnetischen Erregungskoeffizienten μ annehmen, obgleich uns Absorption von magnetischer Energie bisher merklich nicht entgegengetreten ist.

Mit den Beziehungen (2) erhalten wir nun

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_e = e^{-i(\nu-\nu^*)t}/_4\cdot\{&\varepsilon(E\mathfrak{n})E^* + \varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})E \\ &- {}^1/_2\cdot(\varepsilon+\varepsilon^*)(EE^*)\mathfrak{n}\} \\ + {}^1/_4\cdot\{&\varepsilon(E\mathfrak{n})E\cdot e^{i2\nu t} + \\ &\varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})E^*\cdot e^{-i2\nu^* t}\} \\ - {}^1/_8\cdot\{&\varepsilon(EE)\cdot e^{i2\nu t} + \\ &\varepsilon^*(E^*E^*)\cdot e^{-i2\nu^* t}\}\,\mathfrak{n}; \end{aligned}\right| \quad (3)$$

einen entsprechenden Ausdruck für $\mathfrak{T}_m$.

Lösen wir die zweite und dritte geschweifte Klammer auf, so zeigt sich, daß die Momentanspannung sich nicht additiv zusammensetzt aus den beiden geradlinigen Schwingungen, in welche die Elementarschwingung des Feldes zerlegt gedacht werden kann, wohl aber der bei rein und fast rein periodischer Schwingungsform bildbare im Raume feststehende Tensor der mittleren elektrischen Spannung:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{T}}_e = e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\{&\varepsilon(E\mathfrak{n})E^* + \varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})E \\ &- {}^1/_2\cdot(\varepsilon+\varepsilon^*)(EE^*)\mathfrak{n}\}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

sowie der Tensor der mittleren magnetischen Spannung:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{T}}_m = e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\{&\mu(M\mathfrak{n})M^* + \mu^*(M^*\mathfrak{n})M \\ &- {}^1/_2\cdot(\mu+\mu^*)(MM^*)\mathfrak{n}\}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

die wir aus (3) erhalten, indem wir die zweite und dritte geschweifte Klammer streichen, da sie bei der zeitlichen Mittelwertsbildung keinen Beitrag geben.

In bezug auf das betrachtete Flächenelement ($\mathfrak{n}$) haben wir als Normalkomponente bzw. Tangentialkomponente von $\overline{\mathfrak{T}}_e$

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n})\,\mathfrak{n} = e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\varepsilon'\{&2(E\mathfrak{n})(E^*\mathfrak{n}) \\ &- (EE^*)\}\,\mathfrak{n} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{T}}_e - \overline{(\mathfrak{T}_e\mathfrak{n})}\,\mathfrak{n} &= e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\{\varepsilon(E\mathfrak{n})E^* + \\ &\quad \varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})E - (\varepsilon+\varepsilon^*)(E\mathfrak{n})(E^*\mathfrak{n})\,\mathfrak{n}\} \\ &= e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\{\varepsilon(E\mathfrak{n})E_t^* + \varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})E_t\}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wenn wir mit dem Zeiger t die Projektion von E auf das Flächenelement ($\mathfrak{n}$) andeuten.

Die Normalkomponente ist somit von ε'' explizite unabhängig, die Tangentialkomponente nur dann, wenn $\mathfrak{E}$ geradlinig schwingt.

An Unstetigkeitsflächen der Körperkonstanten ε' oder ε'' ist in jedem Flächenelement ($\mathfrak{n}$) die Tangentialkomponente (7) stetig.

Die Lagen der Hauptachsen der beiden Tensorellipsoide ergeben sich aus der Erwägung, daß in ihnen die Schubspannungen $[\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n}]$ bzw. $[\overline{\mathfrak{T}}_m\mathfrak{n}]$ verschwinden müssen, was für das elektrische Spannungsellipsoid auf die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon(E\mathfrak{n})[E^*\mathfrak{n}] + \varepsilon^*(E^*\mathfrak{n})[E\mathfrak{n}] = 0 \quad (8)$$

führt.

Setzen wir dann die hieraus ermittelten drei Hauptrichtungen ($\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$) in den Ausdruck (6) ein, den wir auch schreiben können

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n}) = e^{-2\nu'' t}/_4\cdot\varepsilon'\{&2(\mathfrak{E}_{\max}\mathfrak{n})^2 + 2(\mathfrak{E}_{\min}\mathfrak{n})^2 \\ &- \mathfrak{E}_{\max}^2 - \mathfrak{E}_{\min}^2\}, \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

so bekommen wir die Hauptwerte des Tensors $\overline{\mathfrak{T}}_e$; entsprechendes gilt natürlich auch für $\overline{\mathfrak{T}}_m$.

Ist das elektrische Feld strichpolarisiert, so ist das Tensorellipsoid von $\overline{\mathfrak{T}}_e$ eine Kugel, mit Zug in Richtung der Schwingung und Druck senkrecht dazu, vorausgesetzt daß ε' positiv ist; ist ε' negativ, so kehren sich die Vorzeichen der Hauptwerte um.

Ist das elektrische Feld kreispolarisiert, so ist das Tensorellipsoid von $\overline{\mathfrak{T}}_e$ in eine Strecke entartet, die parallel der Rotationsachse

von $\mathfrak{E}$ liegt, und zwar haben wir Druck bzw. Zug, je nachdem $\varepsilon' \gtrless 0$ ist.

Für beliebige Elliptizitäten des elektrischen Feldes hat (8) die drei Lösungen

1) $\mathfrak{n}$ proportional $[E\,E^*]$, als $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1$ parallel der Rotationsachse von $\mathfrak{E}$.

2) und 3) $(\mathfrak{n}\,[E\,E^*]) = 0$, $\mathfrak{n}$ also komplanar mit E' und E'',

somit von der Form

$$\mathfrak{n} = \alpha E + \beta E^*, \tag{9}$$

worin α und β Größen sind, die sich folgendermaßen bestimmen lassen. Geht man mit dem Ansatz (9) in die Bedingungsgleichung (8) ein, so kommt

$$\beta/\alpha = \lambda_{\varepsilon''} + \lambda; \quad \lambda_{\varepsilon''} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{\varepsilon^*}\,\frac{(E\,E^*)}{(E^*E^*)}$$

$$\lambda = \sqrt[2]{\frac{(\varepsilon - \varepsilon^*)^2 (E\,E^*)^2 + 4\varepsilon\varepsilon^*(E\,E)(E^*E^*)}{4\varepsilon^{*2}(E^*E^*)^2}}. \tag{10}$$

Durch Quadrierung von (9) und Benutzung von (10) erhält man weiter α. Das Ergebnis für $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}_3$ ist im allgemeinen verwickelt. Einfach fällt es aus, wenn ε reell ist.

Es sei also $\varepsilon'' = 0$. Dann ist $\lambda_{\varepsilon''} = 0$ und $\lambda = H^{*2} = \sqrt[2]{(E\,E)/(E^*E^*)}$. Die Größe α erhalten wir jetzt einfacher durch skalare Multiplikation des Ansatzes (9) mit $\mathfrak{n}$. So kommt

$$\mathfrak{n} = \frac{H\,E \pm H^* E^*}{H\,(E\,\mathfrak{n}) \pm H^*\,(E^*\mathfrak{n})}, \quad \text{also}$$

$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{E}_{max}/|\mathfrak{E}_{max}|$ für das obere Zeichen, (11)

$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{E}_{min}/|\mathfrak{E}_{min}|$ für das untere Zeichen. (12)

Mit diesen drei Hauptrichtungen erhalten wir aus (6')

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{n}_1 \perp \mathfrak{E}_{min}^{max}\colon\ (\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n}) = -\varepsilon'/_4 \cdot \{\mathfrak{E}_{max}^2 + \mathfrak{E}_{min}^2\} \\ \text{also falls } \varepsilon' > 0\text{: Druck, falls } \varepsilon' < 0\text{: Zug,} \\ \mathfrak{n}_2 \parallel \mathfrak{E}_{max}\colon\ (\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n}) = +\varepsilon'/_4 \cdot \{\mathfrak{E}_{max}^2 - \mathfrak{E}_{min}^2\} \\ \text{also falls } \varepsilon' > 0\text{: Zug, falls } \varepsilon' < 0\text{: Druck,} \\ \mathfrak{n}_3 \parallel \mathfrak{E}_{min}\colon\ (\overline{\mathfrak{T}}_e\mathfrak{n}) = -\varepsilon'/_4 \cdot \{\mathfrak{E}_{max}^2 - \mathfrak{E}_{min}^2\} \\ \text{also falls } \varepsilon' > 0\text{: Druck, falls } \varepsilon' < 0\text{: Zug.} \end{array}\right| \tag{13}$$

Die Tensorinvariante hat den Wert $-\varepsilon'/_4 \cdot \{\mathfrak{E}_{max}^2 + \mathfrak{E}_{min}^2\}$.

Bei der Bewegung von $\mathfrak{n}$ bleibt also der Endpunkt des Tensors $\overline{\mathfrak{T}}_e$ ständig in der Oberfläche eines verlängerten Rotationsellipsoids, dessen größte Achse mit der Rotationsachse der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ zusammenfällt. Hälftet $\mathfrak{n}$ den Winkel zwischen $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{E}_{min}$, so verschwindet nach (8) die Normalkomponente von $\overline{\mathfrak{T}}_e$.

Es sei $\varepsilon'' \neq 0$. Auch dann fällt $\mathfrak{n}_1$ mit der Rotationsachse von $\mathfrak{E}$ zusammen, und ist der zugehörige Hauptwert von $\overline{\mathfrak{T}}_e$ der unter (13) angegebene. Die zweite und die dritte Hauptachse, $\mathfrak{n}_2$ und $\mathfrak{n}_3$, liegen zwar noch in der Schwingungsebene von $\mathfrak{E}$, fallen aber nicht mehr mit $\mathfrak{E}_{max}$ bzw. $\mathfrak{E}_{min}$ zusammen, und zwar deshalb nicht, weil die elektrische Erregung der elektrischen Feldstärke in der Phase nacheilt. Sie bilden jetzt einen gewissen Winkel χ mit $\mathfrak{E}_{max}$ bzw. $\mathfrak{E}_{min}$, der auch auf den zweiten und dritten Hauptwert von $\overline{\mathfrak{T}}_e$ einwirkt: man erhält sie, wenn man die unter (13) angegebenen mit $\cos 2\chi$ multipliziert; der Winkel χ berechnet sich aus $\varepsilon''/\varepsilon' \cdot |\mathfrak{E}_{min}|/|\mathfrak{E}_{max}| \cdot \operatorname{tg}^2\chi - \{1 - |\mathfrak{E}_{min}|/|\mathfrak{E}_{max}|\}\operatorname{tg}\chi + \varepsilon''/\varepsilon' = 0$.

Elektrische Extinktion vergrößert also die Elliptizität der das Rotationsellipsoid von $\overline{\mathfrak{T}}_e$ erzeugenden Ellipse. Für Flächenelemente, die zur Schwingungsebene des elektrischen Feldes senkrecht stehen, sind somit durch Extinktion die Spannungen verringert gegenüber solchen, die in jener Schwingungsebene liegen.

Bemerkenswert ist noch der Satz: In einem Körper mit negativer erster elektrischer Wellenkonstante haben die elektrischen Normalspannungen das entgegengesetzte Vorzeichen derjenigen in Körpern mit gleichgroßer positiver erster Wellenkonstante; ist sie gleich null, so sind nach unseren Ansätzen (1) und (2) nur elektrische Schubspannungen möglich.

Für eine elektromagnetische Planwelle $(\mathfrak{w};\ \mathfrak{e};\ \mathfrak{m})$ gehen die Ausdrücke (4) und (5) über in

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathfrak{T}}_e = e^{-2\{\nu''t - (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})\}}/_4 \cdot \{\varepsilon(\mathfrak{e}\,\mathfrak{n})\mathfrak{e}^* + \varepsilon^*(\mathfrak{e}^*\mathfrak{n})\mathfrak{e} \\ \qquad - {}^1/_2 \cdot (\varepsilon + \varepsilon^*)(\mathfrak{e}\mathfrak{e}^*)\,\mathfrak{n}\}, \end{array}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathfrak{T}}_m = e^{-2\{\nu''t - (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})\}}/_4 \cdot \{\mu(\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})\mathfrak{m}^* + \\ \quad \mu^*(\mathfrak{m}^*\mathfrak{n})\mathfrak{m} - {}^1/_2 \cdot (\mu + \mu^*)(\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}^*)\,\mathfrak{n}\}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{mit } \mathfrak{m} = {}^1/a_m \cdot [\mathfrak{w}\,\mathfrak{e}];\ (\mathfrak{e}\,\mathfrak{w}) = 0; \\ a_e = \varepsilon\nu/v;\ a_m = \mu\nu/v;\ a_e \cdot a_m = a. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Wir wollen die Gesamtspannungen analysieren für den Fall einer einfachen Welle. Nach früheren Erörterungen ist das eine Welle, in welcher die Komponenten des Wellennormalenpaares in einer Linie liegen, infolgedessen die Strahlung $\mathfrak{R}$ und das Wellennormalenpaar $\mathfrak{w}$ zusammenfallen, sowie die elektrische und magnetische Schwingung — gleiche Elliptizität aufweisend — rechtwinklig zueinander und senkrecht zu $\mathfrak{w}$ orientiert sind.

Für ein Flächenelement, dessen Normale $\mathfrak{n}_1$ parallel $\mathfrak{w}$ zeigt, bekommen wir aus (14) bis (16)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\mathfrak{T}}_e + \overline{\mathfrak{T}}_m = -\{\mathfrak{E}_{max}^2 + \mathfrak{E}_{min}^2\}\,{}^1/_4 \cdot \\ \qquad \cdot \{\varepsilon' + \mu'\sqrt{a_e a_e^*/a_m a_m^*}\}\,\mathfrak{n}_1. \end{array}\right\} \tag{17}$$

Bei permanenten Schwingungen $(\nu'' = 0)$

und Abwesenheit von magnetischer Energieabsorption ($\mu'' = 0$) kann man statt dessen auch schreiben

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_e + \overline{\mathfrak{T}}_m = -\{\mathfrak{E}_{max}^2 + \mathfrak{E}_{min}^2\}\cdot \\ V/4\nu \cdot \{a_e' + \sqrt{a_e'^2 + a_e''^2}\}\,\mathfrak{n}_1 .\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

In einer einfachen Welle herrscht bei permanenten Schwingungen in Flächenelementen senkrecht zur Strahlung stets Druck, auch bei negativer erster elektrischer Wellenkonstante, der dann aber bei schwacher Extinktion verschwindend klein ist.

Wir berechnen weiter die Spannungen in Flächenelementen, deren Normalen $\mathfrak{n}_2$ bzw. $\mathfrak{n}_3$ parallel $\mathfrak{E}_{max}$ bzw. $\mathfrak{E}_{min}$ liegen, unter der ferneren Beschränkung, daß die Extinktion durch elektrische Energiezerstreuung unmerklich sei. Dann können wir die Formeln (13) für $\overline{\mathfrak{T}}_e$ und entsprechende für $\overline{\mathfrak{T}}_m$ verwenden.

Da $\mathfrak{E}_{max}$ und $\mathfrak{M}_{max}$ sich dann rechtwinklig kreuzen, wirken jetzt die elektrischen und magnetischen Spannungen einander entgegengesetzt. Indem wir die aus (16) folgende allgemeine Beziehung

$$|a_m|\{\mathfrak{M}_{max}^2 - \mathfrak{M}_{min}^2\} = |a_e|\{\mathfrak{E}_{max}^2 - \mathfrak{E}_{min}^2\} \quad (19)$$

verwerten, kommt für $\mathfrak{n}_2 \parallel \mathfrak{E}_{max}$:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_e + \overline{\mathfrak{T}}_m = \{\mathfrak{E}_{max}^2 - \mathfrak{E}_{min}^2\} V/4\nu\cdot \\ \{a_e' - \sqrt{a_e'^2 + a_e''^2}\}\,\mathfrak{n}_2 ,\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

und für $\mathfrak{n}_3 \parallel \mathfrak{M}_{max}$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{T}}_e + \overline{\mathfrak{T}}_m = -\{\mathfrak{E}_{max}^2 - \mathfrak{E}_{min}^2\} V/4\nu\cdot \\ \{a_e' - \sqrt{a_e'^2 + a_e''^2}\}\,\mathfrak{n}_3 .\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die elektromagnetische Spannung in einem Flächenelement ($\mathfrak{n}_2 \parallel \mathfrak{E}_{max}$) ist stets negativ, also ein Druck.

Die elektromagnetische Spannung in einem Flächenelement ($\mathfrak{n}_3 \parallel \mathfrak{M}_{max}$) ist stets positiv, also ein Zug.

Beide Spannungen sind von gleichem Betrage.

Ist die erste elektrische Wellenkonstante a_e' positiv, so sind diese beiden Spannungen fast null; ist sie negativ, so sind sie verhältnismäßig groß.

Ist die einfache Welle kreispolarisiert, so besteht in ihr nur ein Druck, und zwar nur in Flächenelementen senkrecht zur Strahlung. Ist die einfache Welle strichpolarisiert, so besteht in ihr ein Druck in Flächenelementen, die senkrecht zur Strahlung oder zu $\mathfrak{E}_{max}$ liegen, dagegen ein Zug in solchen, die senkrecht zu $\mathfrak{M}_{max}$ orientiert sind.

Vielleicht bietet die letztgenannte Gegensätzlichkeit sowie die wesentlich verschiedene Stärke der Flächenkräfte je nach dem Vorzeichen der ersten elektrischen Wellenkonstante uns ein Mittel, die Lage des magnetischen und des elektrischen Feldes in einer strichpolarisierten Lichtwelle durch Messung von Kräften festzustellen.

Als Beispiel der Verhältnisse in nicht einfachen Wellen wollen wir das Spannungssystem betrachten, das der Wellenzustand in einem elektrisch erregungslosen Körper[1]) hervorruft. Elektrische Spannungen können nach unseren Ansätzen (1) und (2) in einem solchen nicht auftreten. Für die magnetischen Spannungen ist das magnetische Feld maßgebend, das je nach der Spreizung des Wellennormalenpaares in zwei verschiedenen Formen bestehen kann: a) Ist die Spreizung eine gestreckte, so existiert keine Wellennormale und infolgedessen kein magnetisches Feld, also existieren auch keine magnetischen Spannungen. Das zeitlich schwankende, quasielektrostatische Feld ist spannungsfrei. b) Ist die Spreizung eine nicht gestreckte, so kann der Spreizwinkel nur ein rechter Winkel sein. Dann schwingt das magnetische Feld kreisförmig in der Ebene des Wellennormalenpaares und das magnetische Tensorellipsoid ist eine Strecke, dessen Hälfte den Betrag $-e^{-2\nu''t}\cdot\mu'/2\cdot\mathfrak{M}_{max}^2$ hat; Schubspannungen fehlen.

Nur Flächenelemente, die in der Ebene des Wellennormalenpaares liegen, erfahren Kräfte, und zwar bei positiven μ' Drucke. Diese stehen senkrecht zur Strahlung, die in der Ebene des Wellennormalenpaares verläuft.

Die Spannungen dienen dazu, um die Gesamtkraft $\overline{\mathfrak{K}}$ zu berechnen, die das elektromagnetische Feld auf die Elektronen eines begrenzten Gebietes ausübt. Bezeichnet df eines seiner Oberflächenelemente mit nach außen gerichteter Normale, so ist bei ungedämpften oder fast ungedämpften Schwingungen

$$\overline{\mathfrak{K}} = \int df\,\{\overline{\mathfrak{T}}_e + \overline{\mathfrak{T}}_m\}_a , \quad (22)$$

indem zusätzliche, von der veränderlichen Strahlung abhängige Volumkräfte infolge der Periodizität der Schwingungen im Zeitmittel verschwinden. Der Zeiger a verlangt die Werte auf der Außenseite. Zur Ermittelung von $\overline{\mathfrak{K}}$ braucht man also nur die Flächenkräfte an der Außenseite der Begrenzungsfläche zu kennen.

§ 2. Die elektromagnetische Kraft auf Unstetigkeitsflächen.

Eine Unstetigkeitsfläche von ε', ε'', μ' oder μ'' bewirkt Unstetigkeiten der Spannungen in doppelter Hinsicht: einmal insofern die genannten

1) K. Uller, Der Wellenzustand im elektrisch erregungslosen Körper. (In Veröffentlichung begriffen.)

Erregungskoeffizienten explizite auftreten, dann insofern das Feld durch sie unstetig wird. Diese Unstetigkeiten spielen eine Rolle in der Berechnung der Kraft $\overline{\mathfrak{K}}$, die das Feld auf die (unendlich kleine) Flächeneinheit einer dieser Unstetigkeitsflächen ausübt an einer Stelle, wo nicht gerade zwei solcher Unstetigkeitsflächen sich schneiden. Als begrenztes Gebiet im Sinne des vorigen Abschnittes nehmen wir einen unendlich flachen Zylinder, dessen Querschnitt das betrachtete Flächenelement ist; die Normale $\mathfrak{f}$ wählen wir vom Medium (1) nach dem Medium (2) zu gerichtet. Wegen der Stetigkeiten der Tangentialkomponenten der Spannungen muß $\overline{\mathfrak{K}}$ eine Normalkraft sein. Beschränken wir uns auf den allermeist vorkommenden Fall, daß der magnetische Erregungskoeffizient μ nicht merklich unstetig ist, dann liefern die magnetischen Spannungen wegen ihrer Stetigkeit keinen Beitrag zu $\overline{\mathfrak{K}}$, es bleibt nach der letzten Formel des vorangehenden Paragraphen

$$\overline{\mathfrak{K}} = (\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{f})\,\mathfrak{f} = (\overline{\mathfrak{T}}_{e1}\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{n}_1 + (\overline{\mathfrak{T}}_{e2}\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{n}_2 \qquad (1)$$

mit $\mathfrak{n}_1 = -\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{n}_2 = +\mathfrak{f}$. Mit Gl. (6) § 1 wird hieraus bei Benutzung der Feldstetigkeiten

$$\left.\begin{array}{l} E - (E\mathfrak{f})\,\mathfrak{f} = E_t \text{ stetig;} \\ a_e(E\mathfrak{f}) = \varepsilon\nu/\nu\cdot(E\mathfrak{f}) \text{ stetig} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{f}) = \left\{\dfrac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_2\varepsilon_2^*} - \dfrac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}\right\}\dfrac{\varepsilon\varepsilon^*}{4}e^{-2\nu''t}(E\mathfrak{f})(E^*\mathfrak{f}) \\ \qquad - \{\varepsilon_2' - \varepsilon_1'\}\,e^{-2\nu''t}/_4\cdot(E_tE_t^*) \\ = \varepsilon_2'\left\{1 - \dfrac{\varepsilon_2'}{\varepsilon_1'}\,\dfrac{1+(\varepsilon_2''/\varepsilon_2')^2}{1+(\varepsilon_1''/\varepsilon_1')^2}\right\}e^{-2\nu''t}/_4\cdot \\ (E_2\mathfrak{f})(E_2^*\mathfrak{f}) - \varepsilon_2'\{1-\varepsilon_1'/\varepsilon_2'\}\,e^{-2\nu''t}/_4\cdot \\ (E_{2t}\cdot E_{2t}^*). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Je nach den Verhältnissen $\varepsilon_2'/\varepsilon_1'$, $(\varepsilon_2''/\varepsilon_2')^2$, $(\varepsilon_1''/\varepsilon_1')^2$ kann das Vorzeichen beider Glieder gleich oder entgegengesetzt sein. Über die Richtung von $\overline{\mathfrak{K}}$ läßt sich daher von vornherein nur in folgenden Unterfällen eine Aussage machen.

Ist $\varepsilon_2'/\varepsilon_1' > 0$ und $(\varepsilon_2''/\varepsilon_2')^2 = (\varepsilon_1''/\varepsilon_1')^2$, *oder schwingt das elektrische Feld parallel der Unstetigkeitsfläche, dann ist* $\overline{\mathfrak{K}}$ *nach dem Medium mit kleinerem* ε' *zu gerichtet.*

Verschwindet E_t — was bei einer einzigen Welle der Fall ist, wenn $(\mathfrak{w}\mathfrak{f}) = 0$ und $(\mathfrak{e}[\mathfrak{w}\mathfrak{f}]) = 0 = (\mathfrak{m}\mathfrak{f})$ erfüllt ist, also wenn das Wellennormalenpaar und das magnetische Feld tangential liegen —, dann läßt sich über die Richtung von $\overline{\mathfrak{K}}$ folgendes sagen: *Ist* $\varepsilon_2' < 0$ *und* $\varepsilon_1' > 0$, *oder ist* $\varepsilon_2' > 0$ *und neben* $\varepsilon_1' > 0$ *noch* $\varepsilon_2'\{1 + (\varepsilon_2''/\varepsilon_2')^2\} > \varepsilon_1'\{1 + (\varepsilon_1''/\varepsilon_1')^2\}$, *dann ist* $\overline{\mathfrak{K}}$ *nach dem Medium (1) zu gerichtet.* Man sieht, daß die elektromagnetische Kraft nach Richtung und Größe wesentlich von den Vorzeichen der ersten elektrischen Wellenkonstanten beeinflußt ist!

Bei Gasen und Flüssigkeiten kann jedes Element der Unstetigkeitsfläche der auf es wirkenden elektromagnetischen Kraft folgen. In glühenden und leuchtenden Gasen sind vermutlich bei größeren Dichten die ersten elektrischen Wellenkonstanten negativ. Wenn dem so unter Umständen ist, müssen in Lichtbogen, Kugelblitzen und Sonnen unter Umständen *nach der Mitte zu* gerichtete elektromagnetische Kräfte wirksam sein und *Zusammenziehung* der begrenzten Gasmasse verursachen. Mangels fester Unterlagen sind aber zurzeit Betrachtungen und Rechnungen noch verfrüht.

§ 3. Die elektromagnetische Kraft, die eine einfallende Welle auf einen festen Körper ausübt.

Im ersten Medium falle eine seitlich begrenzte einfarbige Planwelle $(\mathfrak{w}_i;\ \mathfrak{e}_i)$, ein elektromagnetischer Strahl, gegen das zweite Medium ein. Die glatte Treffläche f sei eben, ihr Flächenlot $\mathfrak{f}$ von (1) nach (2) gerichtet. Die Unstetigkeit der Körperkonstanten daselbst ist die Ursache der Auslösung von Sekundärwellen durch die einfallende Welle und zugleich der Unstetigkeiten in den Spannungssystemen.

Für diesen Wellenzustand suchen wir die Kraft $\overline{\mathfrak{K}}$ auf den Körper (2) unter der *Annahme, daß außerhalb* f *nirgendwo an der Begrenzung dieses Körpers ein Feld bestehe.* Diese Annahme ist erfüllt bei Totalreflexion, wobei im zweiten Medium kein Feld besteht, oder wenn bei Strahlumbiegung oder bei Extinktion der Körper hinreichend dick ist. Wir setzen $f = 1$.

Für die *Normalkomponente* von $\overline{\mathfrak{K}}$ in bezug auf die Richtung $\mathfrak{f}$ erhalten wir mit Gl. (22) sowie mit (4), (5) und (6) des § 1

$$(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{f})\,\mathfrak{f} = \{(\overline{\mathfrak{T}}_{e1}\mathfrak{f}) + (\overline{\mathfrak{T}}_{m1}\mathfrak{f})\}\,\mathfrak{f} \text{ mit } \mathfrak{n}_1 = -\mathfrak{f}, \qquad (1)$$

also

$$(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{f}) = e^{-2\langle\nu''t - (\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/_4\cdot\varepsilon_1'\{(\mathfrak{e}_{1t}\mathfrak{e}_{1t}^*) - (\mathfrak{e}_1\mathfrak{f})(\mathfrak{e}_1^*\mathfrak{f})\}$$
$$+ e^{-2\langle\nu''t - (\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/_4\cdot\mu_1'\{(\mathfrak{m}_{1t}\mathfrak{m}_{1t}^*) - (\mathfrak{m}_1\mathfrak{f})(\mathfrak{m}_1^*\mathfrak{f})\},$$

wenn wir noch $(\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_1^*)$ und $(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_1^*)$ in ihre tangentielle und normale Glieder zerlegen. Des weiteren ist es bequem, das Feld in (1) durch das in (2) auszudrücken, was mit Hilfe der Grenzbedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{e}_{1t} = \mathfrak{e}_{2t};\quad \mathfrak{m}_{1t} = \mathfrak{m}_{2t} \\ a_{e1}(\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}) = a_{e2}(\mathfrak{e}_2\mathfrak{f});\ a_{m1}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{f}) = a_{m2}(\mathfrak{m}_2\mathfrak{f}) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

liefert:

$$\left.\begin{array}{l} (\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{f}) = e^{-2\langle\nu''t - (\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/_4\cdot\varepsilon_1'\{(\mathfrak{e}_{2t}\mathfrak{e}_{2t}^*) - \\ \qquad a_{e2}a_{e2}^*/a_{e1}a_{e1}^*\cdot(\mathfrak{e}_2\mathfrak{f})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{f})\} \\ \quad + e^{-2\langle\nu''t - (\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/_4\cdot\mu_1'\{(\mathfrak{m}_{2t}\mathfrak{m}_{2t}^*) - \\ \qquad a_{m2}a_{m2}^*/a_{m1}a_{m1}^*\cdot(\mathfrak{m}_2\mathfrak{f})(\mathfrak{m}_2^*\mathfrak{f})\}; \end{array}\right\} \qquad (3)$$

dabei ist nach (16) § 1

$$\left.\begin{aligned} a_{m2}a_{m2}^*(\mathfrak{m}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{m}_2^*\mathfrak{k}) &= (\mathfrak{e}_2[\mathfrak{w}_2\mathfrak{k}])(\mathfrak{e}_2^*[\mathfrak{w}_2^*\mathfrak{k}]);\\ a_{m2}a_{m2}^*(\mathfrak{m}_{2t}\mathfrak{m}_{2t}^*) &= (\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_2^*\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_{2t}\mathfrak{e}_{2t}^*)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}&+2(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_2^*\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{k})-(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{k})\\ &+(\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*)(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{k})-(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2\mathfrak{w}_2^*)\\ &\qquad -(\mathfrak{w}_2^*\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{w}_2);\end{aligned} \quad (5)$$

ferner nach früheren Veröffentlichungen[1])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_2 &= A_{e2}\mathfrak{e}_i + B_{e2}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{k})\mathfrak{w}_i + C_{e2}(\mathfrak{e}_i\mathfrak{k})\mathfrak{k},\\ \text{mit } A_{e2} &= \frac{2a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})}{a_{m2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})+a_{m1}(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})}\\ B_{e2} &= (a_2-a_1)A_{e2}/a_{m2}N_m\\ C_{e2} &= (a_{m1}-a_{m2})a_{e1}\{(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})-(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})\}\cdot A_{e2}/a_{m2}N_m\\ (\mathfrak{w}_2\mathfrak{k}) &= \sqrt{a_2-a_1+(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})^2}\\ N_m &= -\{a_{e2}(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})+a_{e1}(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})\}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wir wollen folgende Unterfälle herausheben:

a) Im Falle: $(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})=0$, wenn also das einfallende Wellennormalenpaar parallel der Treffebene liegt, verschwinden die A_{e2}, B_{e2}, C_{e2}, das zweite Medium ist dann also feldfrei. Dann findet Totalreflexion der Energie statt und $(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k})$ hat nach (3) den Wert Null.

b) Im Falle: $[\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}]=0$ fällt das einfallende Wellennormalenpaar in das Flächenlot. Dann folgt aus der Divergenzlosigkeit der elektrischen und magnetischen Welle, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ parallel der Treffebene schwingen müssen. Da dann $(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})^2=a_2$, so wird nach (5) $(\mathfrak{m}_{2t}\mathfrak{m}_{2t}^*)=\sqrt{a_{e2}a_{e2}^*/a_{m2}a_{m2}^*}\cdot\mathfrak{n}_{2t}\mathfrak{n}_{2t}^*)$, so daß

$$\left.\begin{aligned}(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k}) &= e^{-2\langle\nu''t-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot(\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_i^*)A_{e2}A_{e2}^*\cdot\\ &\quad \{\varepsilon_1'+\mu_1'|\varepsilon_2|/|\mu_2|\}\cdot\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ist $\varepsilon_1'>0$, so haben wir stets einen Druck auf den Körper (2)! Ist dagegen $\varepsilon_1'<0$, so kann ein Zug auftreten, nämlich wenn $|\varepsilon_1'|>\mu_1'|\varepsilon_2|/|\mu_2|$ ausfällt!

c) Im Falle: $(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})=0$ liegt das gebrochene Wellennormalenpaar parallel der Treffebene, was eintritt, wenn $(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})^2=a_1-a_2$ ist. Ist außerdem

$$\alpha)\qquad (\mathfrak{m}_2\mathfrak{k})=0=(\mathfrak{e}_2[\mathfrak{w}_2\mathfrak{k}]),$$

dann verschwindet $\mathfrak{e}_{2t}$ und es kommt

$$\left.\begin{aligned}(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k}) &= e^{-2\langle\nu''t-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot(\mathfrak{e}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_i^*\mathfrak{k})A_{m2}A_{m2}^*\\ &\cdot\Big\{-\varepsilon_1'+\frac{\mu_1'}{a_{m2}a_{m2}^*}\frac{a_{e1}a_{e1}^*}{a_{e2}a_{e2}^*}\cdot\\ &\quad[(\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*)-(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k})]\Big\};\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

A_{m2} erhält man aus A_{e2} unter (6), wenn man a_{m2} durch a_{e2} ersetzt.

Wenn $\varepsilon_1'<0$ ist, haben wir stets einen Druck auf den Körper (2); denn $(\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*)-(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k})=([\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}][\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k}])$ ist stets positiv.

Ist außerdem

$$\beta)\qquad (\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})=0=(\mathfrak{m}_2[\mathfrak{w}_2\mathfrak{k}]),$$

dann verschwindet $\mathfrak{m}_{2t}$ und es kommt

$$\left.\begin{aligned}(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k}) &= e^{-2\langle\nu''t-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot(\mathfrak{m}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{m}_i^*\mathfrak{k})A_{e2}A_{e2}^*\\ &\cdot\Big\{-\mu_1'+\frac{\varepsilon_1'}{a_{e2}a_{e2}^*}\frac{a_{m1}a_{m1}^*}{a_{m2}a_{m2}^*}\cdot\\ &\quad[(\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*)-(\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k})]\Big\}\cdot\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wenn $\varepsilon_1'<0$, haben wir stets einen Zug auf den Körper (2)!

Für eine einfache einfallende Welle und für $\mu_1=\mu_2=\mu_0$, dem Werte im Vakuum, ist

$$(\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_i^*)=\mu_0\sqrt{a_{e1}a_{e1}^*};\ (\mathfrak{w}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{w}_i^*\mathfrak{k})=\mu_0\sqrt{(a_{e1}-a_{e2})(a_{e1}^*-a_{e2}^*)}.$$

Damit vereinfachen sich (8) und (9) zu

$$\left.\begin{aligned}(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k}) &= e^{-2\langle\nu't-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot(\mathfrak{e}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{e}_i^*\mathfrak{k})A_{m2}A_{m2}^*\\ &\cdot\{-\varepsilon_1'+[\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}-\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)}]\\ &\quad\cdot\varepsilon_1\varepsilon_1^*/\varepsilon_2\varepsilon_2^*\}\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

und

$$\left.\begin{aligned}(\overline{\mathfrak{K}}\mathfrak{k}) &= e^{-2\langle\nu''t-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot(\mathfrak{m}_i\mathfrak{k})(\mathfrak{m}_i^*\mathfrak{k})A_{e2}A_{e2}^*\mu_0\\ &\cdot\{-1+[\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}-\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1^*-\varepsilon_2^*)}]\\ &\quad\cdot\varepsilon_1'/\varepsilon_2\varepsilon_2^*\}.\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

Für die Schubkraft $\mathfrak{K}_t=\mathfrak{K}-(\mathfrak{K}\mathfrak{k})\mathfrak{k}$ haben wir nach Gl. (7) § 1

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{K}}_t &= -e^{-2\langle\nu''t-(\mathfrak{w}_i''\mathfrak{r})\rangle}/4\cdot\{\varepsilon_2(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})\mathfrak{e}_{2t}^*+\\ &\varepsilon_2^*(\mathfrak{e}_2^*\mathfrak{k})\mathfrak{e}_{2t}+\mu_2(\mathfrak{m}_2\mathfrak{k})\mathfrak{m}_{2t}^*+\mu_2^*(\mathfrak{m}_2^*\mathfrak{k})\mathfrak{m}_{2t}\}\\ &\text{mit } (\mathfrak{m}_2\mathfrak{k})=-{}^1/a_{m2}(\mathfrak{e}_2[\mathfrak{w}_2\mathfrak{k}]);\\ \mathfrak{m}_{2t} &= {}^1/a_{m2}\cdot\{(\mathfrak{w}_2\mathfrak{k})[\mathfrak{e}_2\mathfrak{k}]-(\mathfrak{e}_2\mathfrak{k})[\mathfrak{w}_i\mathfrak{k}]\}.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

In den vorhin erwähnten Unterfällen (a) bis (c) tritt keine Schubkraft auf.

Die Kräfte auf bewegte Körper werde ich später geben.

Gießen, Phys. Inst., Ende September 1915.

(Eingegangen 1. Oktober 1915.)

Über das Dopplersche Prinzip.

Von W. Voigt[1]).

Die Differentialgleichungen für die Oszilla-

1) K. Uller, Brechung und Zurückwerfung elektromagnetischer Wellen (Verhdl. d. D. Phys. Ges. 16, 875, 1914).

1) Die Geburtstagsfeier des Relativitätsprinzips veranlaßt die Redaktion den Lesern der Phys. Ztschr. anbei einen gelegentlich in Vergessenheit geratenen, sehr frühzeitigen Vorläufer desselben vorzulegen. Tatsächlich wird in dieser, aus den Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Sitzung vom 8. Januar 1887 stammenden Notiz die grundlegende Transformation der optischen Differentialgleichung schon klar formuliert. Nur die durch Einklammerung kenntlich gemachten Zusätze wurden gelegentlich des jetzigen Neudrucks von dem Herrn Verfasser hinzugefügt.

tionen eines elastischen inkompressibeln Mediums sind bekanntlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta u, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta v, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta w, \end{aligned} \tag{1}$$

worin ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oszillationen — genauer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen mit konstanter Amplitude — bezeichnet. Dabei ist vorausgesetzt, daß u, v, w die Relation erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1'}$$

Es seien nun $u = U$, $v = V$, $w = W$ Lösungen dieser Gleichungen, welche an einer gegebenen Oberfläche $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ gegebene von der Zeit abhängige Werte $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ annehmen, so kann man sagen, daß diese Funktionen U, V, W das Gesetz darstellen, nach welchem die Oberfläche $f = 0$ leuchtet.

Vertauscht man in U, V, W resp.

$$\begin{aligned} &x \text{ mit } \xi = x m_1 + y n_1 + z p_1 - \alpha t \\ &y \text{ mit } \eta = x m_2 + y n_2 + z p_2 - \beta t \\ &z \text{ mit } \zeta = x m_3 + y n_3 + z p_3 - \gamma t \\ &t \text{ mit } \tau = t - (a x + b y + c z) \end{aligned} \tag{2}$$

und bezeichnet die so erhaltenen Funktionen resp. mit (U), (V), $(\bar{W})$, so läßt sich durch $u = (U)$, $v = (V)$, $w = (W)$ ebenfalls den Gleichungen (1) genügen.[1])

Denn man erhält z. B. für die erste von ihnen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2}(1 - \omega^2(a^2 + b^2 + c^2)) \\ &= \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2}\left(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right) \right. \\ &+ \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2}\left(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2}\left(m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right) \\ &+ 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta\, \partial \zeta}\left(m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 - \frac{\beta\gamma}{\omega^2}\right) \\ &+ 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta\, \partial \xi}\left(m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 - \frac{\gamma\alpha}{\omega^2}\right) \\ &+ 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi\, \partial \eta}\left(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}\right) \\ &- 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \xi}\left(a m_1 + b n_1 + c p_1 - \frac{\alpha}{\omega^2}\right) \\ &- 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \eta}\left(a m_2 + b n_2 + c p_2 - \frac{\beta}{\omega^2}\right) \\ &\left. - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau\, \partial \zeta}\left(a m_3 + b n_3 + c p_3 - \frac{\gamma}{\omega^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

und diese ist, da ja sein soll:

$$\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2} = \omega^2 \left(\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2} \right),$$

erfüllt, wenn folgende neun Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} 1 - \omega^2 (a^2 + b^2 + c^2) &= m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}, \\ &= m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2}, \\ &= m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta\gamma}{\omega^2} &= m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3, \\ \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} &= m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1, \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} &= m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\omega^2} &= a m_1 + b n_1 + c p_1, \\ \frac{\beta}{\omega^2} &= a m_2 + b n_2 + c p_2, \\ \frac{\gamma}{\omega^2} &= a m_3 + b n_3 + c p_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Nimmt man $\alpha\beta\gamma$ als gegeben an, so hat man 12 verfügbare Konstanten, kann also über drei von ihnen willkürlich verfügen.

Die Auflösung erfolgt am bequemsten, wenn man vorübergehend ein Koordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 benutzt, für welches in den Gleichungen (2) β und γ verschwinden, α gleich $\varkappa$ wird; d. h. ein solches, dessen X_1-Achse in die Richtung fällt, deren Richtungskosinus gegen X, Y, Z mit α, β, γ proportional sind.

Es sei ferner gesetzt

$$\begin{gathered} m_h^2 + n_h^2 + p_h^2 = q_h^2, \quad m_h / q_h = \mu_h, \\ n_h / q_h = \nu_h, \quad p_h / q_h = \pi_h \\ a^2 + b^2 + c^2 = d^2, \quad a/d = \mu, \\ b/d = \nu, \quad c/d = \pi, \end{gathered}$$

dann sind die μ, ν, π die Richtungskosinus von 4 Richtungen, die wir durch δ_1, δ_2, δ_3 und δ bezeichnen wollen, gegen das System X_1, Y_1, Z_1.

Durch diese Einführungen werden unsere Gleichungen (3), (4) und (5):

$$1 - \omega^2 d^2 = q_1^2 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} = q_2^2 = q_3^2, \tag{3'}$$

1) [Wegen der gleichen Ordnung aller Glieder der Gleichung (1) können die rechten Seiten der Substitutionsformeln (2) mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert werden, ohne daß sich an den Resultaten etwas ändert. (Zusatz von 1915)].

$$\mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 + \pi_2\pi_3 = \mu_3\mu_1 + \nu_3\nu_1 + \pi_3\pi_1 = \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \pi_1\pi_2 = 0,$$

d. h. $\cos(\delta_2, \delta_3) = \cos(\delta_3, \delta_1) = \cos(\delta_1, \delta_2) = 0$, (4')

$$\mu\mu_1 + \nu\nu_1 + \pi\pi_1 = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d},$$

$$\mu\mu_2 + \nu\nu_2 + \pi\pi_2 = \mu\mu_3 + \nu\nu_3 + \pi\pi_3 = 0$$

$$\text{d. h. } \cos(\delta, \delta_1) = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d}, \quad \cos(\delta, \delta_2) = \cos(\delta, \delta_3) = 0. \tag{5'}$$

Nach (4') stehen die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 zueinander senkrecht, nach (5') fällt δ_1 mit δ zusammen, es muß also sein:

$$\mu = \mu_1, \; \nu = \nu_1, \; \pi = \pi_1 \text{ und } \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d} = 1. \tag{6}$$

Dies in (3') eingesetzt bestimmt d und $q_1\, q_2\, q_3$.

Man erhält zunächst, da nur positive Zeichen einen Sinn geben:

$$q_1 = 1 \text{ oder } \frac{\varkappa}{\omega},$$

$$d = \frac{\varkappa}{\omega^2} \text{ oder } \frac{1}{\omega}.$$

Ich werde nur die erste Lösung benutzen, da die zweite kein Interesse bietet[1]); aus ihr folgt:

$$d = \frac{\varkappa}{\omega^2}, \; q_1 = 1, \qquad q_2 = q_3 = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q. \tag{7}$$

Hiernach können wir die Gleichungen (2) schreiben:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1\mu_1 + y_1\nu_1 + z_1\pi_1 - \varkappa t = a_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= (x_1\mu_2 + y_1\nu_2 + z_1\pi_2) q \quad = b_1 q \\ \zeta_1 &= (x_1\mu_3 + y_1\nu_3 + z_1\pi_3) q \quad = c_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(\mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z) = t - \frac{\varkappa a_1}{\omega^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

wo für μ_h, ν_h, π_h keine weiteren Bedingungen mehr gelten, als die aus ihrer Bedeutung als Richtungskosinus von drei aufeinander normalen, aber sonst ganz beliebigen Richtungen hervorgehenden.

Es können daher die mit a_1, b_1, c_1 bezeichneten Aggregate als die Koordinaten der Stelle x_1, y_1, z_1 in bezug auf ein mit den Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 zusammenfallendes Koordinatensystem ABC angesehen werden.

Jedes derartige System μ_h, ν_h, π_h gibt eine Lösung $(U), (V), (W)$ aus gegebenen U, V, W. Nahmen U, V, W an einer Oberfläche $f(x, y, z) = 0$ gegebene Werte $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ an, so $(U), (V), (W)$ aus jenen ableitbare $(\overline{U}), (\overline{V}), (\overline{W})$ an der Oberfläche $(f) = f(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, \overline{\zeta_1}) = 0$, welche wegen der Werte von ξ_1, η_1, ζ_1 die Eigenschaft hat, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der durch die Richtungskosinus $\mu_1\, \nu_1\, \pi_1$ gegebenen Richtung δ_1 oder A fortzuschieben. Die Lösungen $(U), (V), (W)$ geben also die Gesetze, nach welchen gewisse in fortschreitender Bewegung begriffene Oberflächen leuchten, wenn sie nur noch der Bedingung

$$\frac{\partial (U)}{\partial x} + \frac{\partial (V)}{\partial y} + \frac{\partial (W)}{dz} = 0$$

genügen. Die beiden Oberflächen $f = 0$ und $(f) = 0$ sind der Form nach nur identisch, wenn $q = 1$, d. h. $\varkappa$ so klein gegen ω ist, daß $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigt werden kann. Ist dies der Fall, so sind sie nur durch ihre Lage gegen die Koordinatenachsen verschieden. Durch geeignete Verfügungen über die willkürlichen Konstanten und die Funktionen U, V, W kann man anschauliche spezielle Fälle erhalten. Durch Transformation der Koordinaten gelangt man dann zu dem wenigstens formell allgemeineren Falle, daß die Verschiebung der Fläche nicht der A-Achse parallel, sondern beliebig gerichtet ist.

Wir verfolgen den speziellen Fall, daß die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 in die drei Koordinatenachsen X_1, Y_1, Z_1 fallen, d. h.

$$\mu_1 = \nu_2 = \pi_2 = 1, \quad \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_3 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \text{ ist.} \tag{9}$$

Dann wird sehr einfach, der Form nach naturgemäß mit (8) identisch:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= y_1 q \\ \zeta_1 &= z_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa x_1}{\omega^2}, \text{ wobei } q = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \text{ ist.}^{1)} \end{aligned} \tag{10}$$

Die Bedingung (1') lautet in diesem Falle

$$(1 - q)\frac{\partial (U)}{\partial \xi} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial (U)}{\partial \tau}$$

was sich ohne weiteres vertauschen läßt mit

$$(1 - q)\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{10'}$$

Dies sagt aus, daß in U die Argumente x und t nur in der Verbindung $(1-q)\, t + \frac{\varkappa x}{\omega^2}$ oder gar nicht vorkommen dürfen. Letzteres ist u. a. der Fall, wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn die fortgepflanzten Schwingungen überall normal zur Translationsrichtung der leuchtenden Oberfläche stehen.

---

1) Aus ihr folgt $q_2 = q_3 = 0$ also auch m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3 und hiernach $\zeta = \eta = 0$.

1) [Dies ist bis auf den für die Anwendungen irrelevanten Faktor q genau die Lorentz-Transformation vom Jahre 1904.]

Geht man von dem vorausgesetzten speziellen Koordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 zu dem allgemeinen X, Y, Z über, welches durch die Relationen

$$x_1 = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1, \quad y_1 = x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2, \quad z_1 = x\alpha_3 + y\beta_3 + z\gamma_3 \tag{11}$$

mit dem ersteren zusammenhängen möge, so erhält man schließlich

$$\xi = xq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\alpha_1(1-q) - \varkappa\alpha_1 t,$$
$$\eta = yq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\beta_1(1-q) - \varkappa\beta_1 t,$$
$$\zeta = zq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\gamma_1(1-q) - \varkappa\gamma_1 t,$$
$$\tau = t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1). \tag{12}$$

Das ist die allgemeine Form (2), von der wir ausgegangen sind, aber mit vollständig durch $\varkappa$, α_1, β_1, γ_1 bestimmten Konstanten, sie enthält das, was man gewöhnlich unter dem Dopplerschen Prinzip versteht, soweit dasselbe richtig ist.

Kann man hierin $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigen, so ist $q = 1$ und man erhält sehr einfach:

$$\xi = x - \varkappa\alpha_1 t$$
$$\eta = y - \varkappa\beta_1 t$$
$$\zeta = z - \varkappa g_1 t \tag{13}$$
$$\tau = t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).$$

Die Bedingung (1') lautet hierbei:

$$0 = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t}(U\alpha_1 + V\beta + W\gamma_1) \tag{13'}$$

und ist bei den angenommenen Vernachlässigungen nur soweit zu erfüllen nötig, daß das in $\frac{\varkappa}{\omega}$ multiplizierte Glied von erster Ordnung wird.

Bewegt sich außer der leuchtenden Oberfläche auch der Beobachter, etwa mit der konstanten Geschwindigkeit $\varkappa'$ in einer durch die Richtungskosinus α', β', γ' gegebenen Richtung, so sind die Verschiebungen u, v, w, nur auf ein mit dem Beschauer bewegtes Koordinatensystem X', Y', Z' zu beziehen, also in (12) oder (13) x mit $x' + \varkappa'\alpha' t$, y mit $y' + \varkappa'\beta' t$, z mit $z' + \varkappa'\gamma' t$ zu vertauschen.

Wir machen von dem Gefundenen einige Anwendungen.

1) Sei eine Ebene parallel der YZ-Ebene in Schwingungen versetzt nach dem Gesetz

$$\overline{W} = A \sin\frac{2\pi t}{T},$$

so ist die nach der positiven X-Achse fortgepflanzte Bewegung gegeben durch:

$$W = A \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\omega}\right).$$

Machen wir hierin die Substitution [ξ, η, ζ, τ für x, y, z, t] nach (10) so ergibt sich:

$$(W) = A \sin\frac{2\pi}{T}\left(1 + \frac{\varkappa}{\omega}\right)\left(t - \frac{x}{\omega}\right).$$

Dies gibt für $x = \varkappa t$:

$$(\overline{W}) = A \sin\frac{2\pi t}{T}\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) = A \sin\frac{2\pi t}{T'}, \tag{14'}$$

wir haben also eine mit der (nur um eine Größe zweiter Ordnung von T verschiedenen) Schwingungsdauer $T' = T\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right)$ schwingende und dabei mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Achse fortschreitende (leuchtende) Ebene. Die fortgepflanzte Schwingung läßt sich schreiben:

$$(W) = A \sin\frac{2\pi}{T'\left(1 - \frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t - \frac{x}{\omega}\right). \tag{14}$$

Wir erhalten also in der fortgepflanzten Welle eine im Verhältnis $\left(1 - \frac{\varkappa}{\omega}\right)/1$ verringerte Schwingungsdauer.

Bewegt sich auch noch der Beobachter, so gilt:

$$(W') = A \sin\frac{2\pi}{T'\left(1 - \frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t - \frac{x' + \varkappa' t}{\omega}\right)$$
$$= A \sin 2\pi\left(t\frac{(\omega - \varkappa')}{T'(\omega - \varkappa)} - \frac{x'}{T'(\omega - \varkappa)}\right).$$

Diese Formel gibt das Dopplersche Prinzip für ebene Wellen. Aber sie ist keineswegs gültig, sondern setzt ganz wesentlich eine Wellenebene mit durchweg konstanter Amplitude voraus.

2) Sei dieselbe Ebene versetzt in Schwingungen nach dem Gesetz:

$$\overline{W} = A e^{(\mu y + \nu z)\frac{2\pi}{T\omega}} \sin\frac{2\pi t}{T}$$

— wie es ähnlich auftritt, wenn eine Welle mit ursprünglich konstanter Amplitude durch ein Prisma aus einer absorbierenden Substanz gegangen ist —, dann gilt für die fortgepflanzte Welle:

$$W = A e^{\frac{2\pi(\mu y + \nu z)}{T\omega}} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\sigma}{\omega}\right),$$

worin $\sigma = \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}$ ist.

Nimmt man hier die Substitution gemäß (10) vor, so kommt, falls $\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q$ gesetzt wird:

$$(W) = A e^{\frac{2\pi(\mu y + \nu z) q}{T\omega}} \sin \frac{2\pi}{T} \left[t\left(1 + \frac{\varkappa \sigma}{\omega}\right) - x\left(\frac{\sigma}{\omega} + \frac{\varkappa}{\omega^2}\right)\right].$$

Dies gibt für $x = \varkappa t$, falls man $\frac{\mu}{q} = \mu'$, $\frac{\nu}{q} = \nu'$ schreibt:

$$(\overline{W}) = A e^{\frac{2\pi(\mu' y + \nu' z)}{T'\omega}} \sin \frac{2\pi t}{T'},$$

wo wiederum $T' = \frac{T}{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}}$ ist,

also eine schwingende und zugleich fortschreitende Ebene; die fortgepflanzte Verrückung aber schreibt sich:

$$(W) = A e^{\frac{2\pi(\mu' y + \nu' z)}{T'\omega}} \cdot \sin \frac{2\pi}{T'} \left(t \frac{1 + \frac{\varkappa \sigma}{\omega}}{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} - x \frac{\frac{\sigma}{\omega} + \frac{\varkappa}{\omega^2}}{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \right), \tag{15}$$

worin jetzt $\sigma = \sqrt{1 + (\mu'^2 + \nu'^2) q^2}$ ist.

Man bemerkt, daß hier ganz andere Gesetze gelten als durch das Dopplersche Prinzip gegeben sind, selbst wenn man sich auf die erste Annäherung beschränkt und $\varkappa^2/\omega^2$ neben 1 vernachlässigt.

3) Ist die leuchtende Oberfläche eine sehr kleine[1]) Kugel vom Radius R, welche nach dem Gesetz für den Drehungswinkel

$$\psi = A \sin \frac{2\pi t}{T}$$

um die X-Achse oszilliert, so sind in der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Kugelmittelpunkt die fortgepflanzten Drehungen ψ gegeben durch:[2])

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{R^3 A}{r^3} \left[\sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r - R}{\omega} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\pi(r-R)}{T\omega} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r - R}{\omega} \right) \right] \\ = & \frac{R^3 A}{r^3} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} \right)^2} \cdot \\ & \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r-R}{\omega} - \eta \right), \end{aligned} \tag{16}$$

worin

$$\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} = \operatorname{ctg} \frac{2\pi\eta}{T}$$

gesetzt ist. Es wird also $\eta = \frac{1}{4} T$ für $r = R$ und $\eta = 0$, wenn r sehr groß gegen die Wellenlänge $T\omega$ ist.

Die fortgepflanzten Verrückungen folgen aus ψ durch:

$$U = 0, \quad V = -\psi z, \quad W = \psi y;$$

wir setzen kurz:

$$U = 0, \quad V = MC, \quad W = NC.$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werte ξ, η, ζ nach (10), so [ist die Bedingung (10') erfüllt und] wird der periodische Teil C:

$$\begin{aligned} (C) = \cos \frac{2\pi}{T} \Big(& t - \frac{\varkappa x}{\omega^2} - \\ & - \frac{1}{\omega} \left(\sqrt{(x - \varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R \right) - (\eta) \Big), \end{aligned} \tag{17}$$

falls $\operatorname{cotg} \frac{2\pi(\eta)}{T}$

$$= \frac{2\pi}{T\omega} \left(\sqrt{(x - \varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R \right) \text{ ist.}$$

Für $(x - \varkappa t)^2 + y^2 + z^2 = R^2$, d. h. an der Oberfläche einer mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Achse verschobenen Kugel, wird dies

$$(\overline{C}) = \sin \frac{2\pi}{T} \left(t\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) - \frac{\varkappa}{\omega^2} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \right)$$

also, da nach der Annahme $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ und $\frac{\varkappa R}{\omega^2 T}$ zweiter Ordnung sind:

$$(\overline{C}) = \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

(M) und (N) haben denselben Wert, als ob die kleine Kugel um die zur Zeit t erreichte Position $x_0 = \varkappa t$ als Gleichgewichtslage oszillierte. Wir erhalten demnach durch (U), (V), (W) die von einem in fortschreitender Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der Richtung der Rotationsachse befindlichen, durch Rotation „leuchtendem Punkte" ausgesandte Bewegung gegeben.

Die fortgepflanzten Wellenflächen beurteilen sich nach dem Wert (17) für (C), der sich unter Einführung der relativen Koordinaten gegen den bewegten leuchtenden Punkt $\xi = x - \varkappa t$, $y = \eta$, $z = \zeta$ schreiben läßt bei Vernachlässigung von $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ neben 1 und für gegen $T\omega$ großes r:

1) [Dies wird später genauer dahin präzisiert, daß der Radius klein gegen die Wellenlänge sein soll. Die Formeln (16) und (17) setzen diese Annahme aber nicht voraus.]

2) W. Voigt, Crelles Journ. Bd. 89, 298. [Ebenda finden sich auch die Gesetze für die Emission einer geradlinig oszillierenden Kugel, die eine gleiche Verwertung gestatten.]

$$(C) = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varkappa\xi}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}(\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} - R)\right).$$

Die Wellenflächen sind also Kugeln, aber nicht um den leuchtenden Punkt, sondern eine um den $\frac{\varkappa}{\omega}$ten Teil ihrer Radien nach der der Bewegung entgegengesetzten Richtung von ihm abliegende Stelle als Zentrum zu konstruieren.

Ein ruhender Beobachter würde also, da die Normale auf der Wellenfläche durch die Beobachtungsstelle die Richtung angibt, in welcher die Lichtquelle wahrzunehmen ist, den leuchtenden Punkt an der Stelle sehen, an welcher er sich vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ befand, oder anders ausgedrückt: er würde, falls sein Radiusvektor r mit der Bewegungsrichtung den Winkel φ einschließt, eine „Aberration" von der Größe $\frac{\varkappa}{\omega}\sin\varphi$, in der der Bewegung des Punktes entgegengesetzten Richtung wahrnehmen.

Was die fortgepflanzten Amplituden (M) und (N) angeht, so haben sie an der Stelle $x\ y\ z$ nach dem Obigen zur Zeit t diejenigen Werte, als ob der leuchtende Punkt sich dauernd an der zu dieser Zeit t erreichten Stelle befunden hätte, während doch die Wellenfläche in $x\ y\ z$ die Form hat, als verharrte der leuchtende Punkt an der zur Zeit $t - \frac{r}{\omega}$ erreichten Stelle. Es gehören also Wellenfläche und Amplitude nicht in dem Sinne, wie bei einem ruhenden leuchtenden Punkte zusammen; letztere ist von der augenblicklichen, erstere von einer verlassenen Position des leuchtenden Punktes abhängig.

So gibt sich das eigentümliche Resultat, daß ein Beobachter einen so bewegten leuchtenden Punkt konstanter Intensität, der sich zur Zeit t in der Entfernung r von ihm befindet, in derjenigen Lage sieht, welche er vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ hatte, aber mit der Intensität, wie sie der augenblicklichen (größeren oder kleineren) Entfernung entspricht.[1])

Die Anwendbarkeit der obigen allgemeinen Betrachtungen auf Probleme der Optik ist beschränkt durch die Nebenbedingung (1'), die auf die Formeln (10') resp. (13') geführt hat.

Eine solche Beschränkung findet bei den analogen Problemen der Akustik von Flüssigkeiten nicht statt. Denn für die fortgepflanzte Dilatation δ gilt hier die einzige Bedingung

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = \omega^2\Delta\delta.$$

Es gibt daher, wenn durch die Nebenbedingungen δ längs einer gegebenen Oberfläche als beliebige Funktion der Zeit vorgeschrieben ist, die Einführung einer der Substitutionen (10), (12) oder (13) stets den Übergang von der Wirkung einer ruhenden Schallquelle zu derjenigen, welche sie in fortschreitender Bewegung begriffen ausübt.

Ist z. B. an einer sehr kleinen Kugel vom Radius R gegeben $\delta = f(t)$, so gibt sich die fortgepflanzte Dilatation:

$$\delta = \frac{R}{r} f\left(t - \frac{r-R}{\omega}\right).$$

Die Substitution (10) gibt den Einfluß einer Translation der „tönenden" Kugel parallel der X-Achse. Die Diskussion des Resultates ist der unter (3) angestellten analog.

1) [Die weitere Verfolgung derartiger Probleme ist s. Z. unterblieben wegen der physikalischen Schwierigkeit einer vollständigen Realisierung der Voraussetzungen der Arbeit — Translation oszillierender Flächen oder Körper innerhalb des die Schwingungen fortpflanzenden Mediums — im Gebiete der Elastizität. Jene Schwierigkeit existiert nicht im Gebiete der Lorentzschen Elektrodynamik, welche den Äther durch alle ponderabelen Körper hindurch erstreckt und letztere innerhalb des ersteren frei beweglich annimmt; jene ist demgemäß der Anwendung der oben auseinander gesetzten Methode viel günstiger. In der Tat haben die oben an einem Beispiele dargelegten Kugelprobleme die nächste Beziehung zu dem Problem des oszillierenden und zugleich fortschreitenden Elektrons, das viele Jahre nach der obigen Arbeit aktuell geworden ist.]

(Eingegangen 8. Oktober 1915.)

BESPRECHUNGEN.

A. Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik. III. Bd. Festigkeitslehre. gr. 8. 5. Auflage. XVIII u. 438 S. mit 100 Abbildungen. Leipzig, B. G. Teubner. 1914. Gebunden M. 12.—

Es zeugt von der allgemeinen Beliebtheit und weitgehenden Brauchbarkeit des Föpplschen Lehrbuches der Festigkeitslehre, daß in verhältnismäßig kurzer Zeit eine sachlich nur wenig geänderte Auflage nötig wurde. Wie schon bei der früheren Besprechung dieses Bandes (diese Zeitschr. **12**, 784, 1911) hervorgehoben wurde, findet der Techniker fast alles, was er braucht in diesem Band III. Einige neue Aufgaben sind in der 5. Auflage hinzugefügt worden, hauptsächlich solche, die sich zur Erläuterung statisch unbestimmter Belastungsfälle eignen. Sehr zu begrüßen ist es, daß nunmehr der zusammengesetzten Beanspruchung auf Biegung und Verdrehung ein besonderer Paragraph gewidmet ist, in dem auch die verschiedenen in Literatur und Praxis üblichen Formeln nebst den zugrundeliegenden Anschauungen klar auseinandergehalten und kritisiert werden. — Für weitgehende Ansprüche und für die theoretische Untersuchung gewisser schwieriger Probleme wird man freilich des 5. Bandes (Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätslehre) nicht entraten können. A. Pröll.

A. L. Hughes, Die Lichtelektrizität. Deutsch von M. Iklé. gr. 8. VI u. 152 S. mit 40 Fig. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1915. Geheftet M. 5,60, gebunden M. 6,40.

Mehrere zusammenfassende deutsche Werke über Lichtelektrizität sind in letzter Zeit erschienen oder angekündigt[1]) worden.

Dies sei vorausgeschickt, um auch an dieser Stelle den Leser zunächst auf das Erscheinen der deutschen Monographien zu verweisen. — Neben ihnen aber wird auch das Hughessche Buch in Deutschland seine Freunde finden. Es beginnt mit kurzer historischer Einleitung (I), dann folgt eine, die wesentlichste Literatur bis Ende 1913 voll berücksichtigende, systematische, sehr klare Behandlung des Stoffes in neun weiteren Kapiteln mit den Überschriften: II. Die Ionisation von Gasen und Dämpfen, III. Die Emissionsgeschwindigkeit der Lichtelektronen, IV. Der lichtelektrische Gesamteffekt, V. Der lichtelektrische Effekt als Funktion der Schwingungszahl und des Polarisationszustandes des Lichtes, VI. Lichtelektrische Eigenschaften dünner Metallschichten, VII. Lichtelektrische Effekte nichtmetallischer Elemente und anorganischer Verbindungen, VIII. Lichtelektrische Effekte von Farbstoffen, fluoreszierenden und phosphoreszierenden Substanzen, IX. Durch Licht erzeugte positive Strahlen, X. Lichtquellen verschiedener Substanzen, Lichtfilter.

In der gesamten Darstellung sind die deutschen Arbeiten vollinhaltlich in gleicher Weise wie die englischen von Hughes verarbeitet. Nur in historischem Zusammenhang ist von Wichtigkeit, daß Lenards klassische Arbeit über die Befreiung der Kathodenstrahlen, in ihrem ersten Abdruck in den Wiener Berichten bereits 1899, zeitlich vor J. J. Thomsons, den gleichen Gegenstand behandelnden Veröffentlichung, erschienen ist.

1) W. Hallwachs, diese Zeitschr. **16**, 96, 1915.

Die objektive, anziehende Darstellungsweise und die gute Übersetzung des Herrn Iklé führen den Leser schnell in die Tiefen des vielbearbeiteten Gebiets. Erich Marx.

G. Bruhat, Recherches expérimentales et théoriques sur les corps possédant une dispersion anomale du pouvoir rotatoire moléculaire. 8. 136 S. Thèse. Paris, Gauthier-Villars et Co. 1914.

Die Untersuchung bezieht sich auf das Verhalten der natürlichen Drehung der Polarisationsebene und des zirkularen Dichroismus in der Umgebung von Absorptionsstreifen und bildet somit die Fortsetzung von Beobachtungen, die zuerst Cotton und später Olmstead in den Jahren 1896 und 1912 ausgeführt hat. Der Verfasser hat sich das besondere Ziel gesteckt, die bez. Erscheinungen bei einfachen wohl definierten Körpern nachzuweisen, wo die physikalischen Verhältnisse eine Vergleichung mit der Theorie aussichtsreich erscheinen lassen. Die durchgeführten Messungen, die im wesentlichen geläufige Methoden benutzen (also auch auf den Dichroismus aus der die Drehung der Schwingungen begleitenden Elliptizität schließen), beziehen sich in erster Linie auf Tartrate von Kupfer, Nickel, Uran, sodann auch Diphenylbornylimidoxanthid und geben zum Teil sehr deutliche Wirkungen der einzelnen Absorptionsstreifen auf Drehung und Elliptizität. Der Vergleichung mit der Theorie werden die von Drude in seiner Optik entwickelten Formeln zugrunde gelegt. Die Übereinstimmung ist sowohl bezüglich des Verlaufes von Drehung und Elliptizität, wie auch von Brechungs- und Absorptionsindex durchaus befriedigend.

Schließlich untersucht der Verfasser, ob die bereits von Biot entdeckte anomale Rotationsdispersion in Lösungen von Weinsteinsäure (nämlich Maxima und Zeichenwechsel der Drehung für von Lösung zu Lösung wechselnde Wellenlängen) von zirkularem Dichroismus begleitet sei und kommt zu einem negativen Resultat. Er sucht die Erklärung der bez. Anomalie in einem komplizierten chemischen Verhalten der Lösungen und hält für wahrscheinlich, daß in ihnen (wie auch in der Schmelze der Substanz) neben dem normalen Molekül isomere vorhanden sind und diese beiden zur Drehung Anteile von entgegengesetztem Vorzeichen und verschiedener Dispersion liefern. Dies hat viel Einleuchtendes: nur ist der Mangel eines zirkularen Dichroismus gewiß kein vollständiger, denn soweit die allgemeine Theorie der natürlich aktiven Körper begründet ist, kommt streng genommen ohne Dichroismus eine Drehung der Polarisationsebene überhaupt nicht zustande. W. Voigt.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

F. Jentzsch, Dr., Privatdozent in Gießen, vor dem Kriege wissenschaftlicher Mitarbeiter von E. Leitz in Wetzlar, wurde als ungedienter Landsturm Kanonier im Fußartillerie-Reg. Nr. 8 in Metz, später zum Luftschifferbataillon I versetzt und befindet sich jetzt als Vizefeldwebel auf der Feldwetterstation 9 in Ostende.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der deutschen Universität Prag Dr. Paul Funk für Mathematik, an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn Dr. Oskar Srnka für elektrische Fernmeldetechnik.

Verliehen: Den Privatdozenten der Chemie Dr. Fritz Mayer und der Physik Dr. Max Seddig an der Universität Frankfurt a. M., sowie dem Privatdozenten der Experimentalphysik an der Universität Göttingen Dr. Adolf Bestelmeyer der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für Agrikulturchemie an der Universität Königsberg Geh. Regierungsrat Dr. Albert Stutzer (zum Ende des Wintersemesters).

Gestorben: Der ord. Professor der Pharmazie und angewandten Chemie an der Universität Würzburg Dr. Ludwig Medicus, der ord. Professor der Theoretischen Physik an der Universität Wien Dr. Friedrich Hasenöhrl, der frühere Herausgeber des „Naturforscher" und „Naturwissenschaftlichen Rundschau" Professor Dr. Wilhelm Sklarek, der emer. ord. Professor für angewandte medizinische Chemie an der Universität Wien K. K. Hofrat und Obersanitätsrat Dr. Ernst Ludwig, das Vorstandsmitglied der Hartmann & Braun A.-G. und des Physikalischen Vereins in Frankfurt a. M. Professor Dr.-Ing. h. c. Eugen Hartmann.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1915/16.

Technische Hochschule Dresden.

Hallwachs: Experimentalphysik I, 5; Physikalisches Praktikum I, 6 oder 3, II, einschließlich Laboratoriumstechnik, für Fortgeschrittene, 9; Praktikum für größere physikalische Arbeiten, 20; Physikalisches Kolloquium, Referate über neue Arbeiten (mit Helm und Toepler), 14tägig, 1 *g*. — **Luther:** Photographisches Praktikum, für Anfänger und Vorgeschrittene, 4 und 8; Selbständige Arbeiten im wissenschaftlich-photographischen Institut, 2 und 4, ferner ganz- und halbtägig. — **Toepler:** Theoretische Physik II: Wärme, 4, Übungen, 1 *g*. — **Görges:** Allgemeine Elektrotechnik II, 2; Theorie des Wechselstromes II, 4; Starkstromanlagen II, mit seminaristischen Übungen, 2; Elektrotechnische Übungen für Geübtere, 8; Elektrotechnisches Praktikum für Ingenieure und Chemiker, 4; Größere elektrotechnische Spezialarbeiten, 20. — **Kübler:** Elektromaschinenbau II, 2, IV, 2, Übungen, für Elektroingenieure, 12, für Maschinen- und Betriebsingenieure, 4; Heizer- und Maschinistenkursus für Studierende, nach Verabredung. — **Barkhausen:** Telephonie und Telegraphie: Wissenschaftliche Grundlagen, 2; Praktikum für Schwachstromtechnik, insbesondere drahtlose Telegraphie I und II, 14tägig, 1½; Selbständige Arbeiten im Institut für Schwachstromtechnik, 10 oder 20. —

F. Foerster: Ausgewählte Kapitel aus der speziellen anorganischen Chemie, 1; Anorganisch-chemisches Praktikum: Qualitative Analyse, 12, Gewichts-, Maß- und Gas-Analyse, Präparate, Übungen, ganztägig, tägl. außer Sonnabend; Elektrochemie, ihre Theorie und technische Anwendung, 2; Physikalische (theoretische) Chemie, 3; Praktikum für Elektrochemie, 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrochemie und physikalischen Chemie, ganztägig. — **W. Hempel:** Metallurgie, 2; Chemische Großindustrie, 2. — **v. Meyer:** Organische Chemie, 5; Organisch-chemisches Praktikum, halb- und ganztägig, tägl. außer Sonnabend; Praktikum für Farbenchemie (mit v. Walther), 8; Praktikum für größere Arbeiten auf dem Gebiete der Farbenchemie bzw. Färbereitechnik (mit v. Walther), ganztägig. — **König:** Chemie der Textilindustrie: Gewinnung der Spinnfasern und ihre Veredelung durch Bleicherei, Färberei, Zeugdruck und Appretur, 2. — **v. Walther:** Chemie und Technologie der Riechstoffe, 2; Chemie des Steinkohlenteers: Die Rohmaterialien und Zwischenprodukte für die Industrie der organischen Farbstoffe, 2. — **Dietz:** Chemische Technologie der Tonwaren, 1. —

Krause: Höhere Mathematik II, 4, Übungen, 2; Höhere Mathematik für die Hochbau- und Chemische Abteilung, 2; Theorie der reellen Funktionen, 4; Mathematisches Seminar, 1 *g*; Seminaristische Übungen für Physiker (mit Naetsch), 1 *g*. — **Helm:** Höhere Mathematik IV, 3, Seminaristische Übungen für Mathematiker (mit Naetsch), 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2; Ergänzungen und Übungen zur Potentialtheorie, 2 *g*. — **Ludwig:** Darstellende Geometrie II, 3, Übungen, 4, Perspektive, mit Übungen, 1; Theorie der Raumkurven und Flächen, 4; Seminaristische Übungen über höhere Geometrie, 1 *g*. — **Naetsch:** Analytische Geometrie der Flächen zweiten Grades, 3; Elementare Algebra und Analysis, 2; Differentialgleichungen und Transformationsgruppen, 2. — **Pattenhausen:** Geodäsie I, 2, Übungen, 2, II, 3, Übungen, 2; Höhere Geodäsie II, 2, Übungen, 2; Einführung in die Kenntnis des Fixsternhimmels, mit Beobachtungen, 1; Geodätische Ausarbeitungen für Bauingenieure, 2; Graphische Ausarbeitungen für Vermessungsingenieure, 2; Geodätische Rechenübungen, 2; Skizzieren geodätischer Instrumente, 2; Katastervermessung, 2; Planzeichnen I, 2. —

Technische Hochschule Graz.

v. Ettingshausen: Physik: Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Elemente der mechanischen Wärmetheorie, Magnetismus, Elektrostatik, Galvanismus, Elektromagnetismus, Induktion, 5; Elektrotechnik, 3½, Elektrotechnische Übungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz:** Physik für technische Chemiker: Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Emich: Anorganische Chemie, 7; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **Andreasch:** Qualitative chemische Analyse I, 2, Laboratoriumsunterricht und Übungen, 14; Chemische Technologie der organischen Stoffe: Technologie der Kohlenhydrate und Gärungsgewerbe, 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung organisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **B. Reinitzer:** Quantitative chemische Analyse I: Gewichtsanalyse, 1, Laboratoriumsunterricht und Übungen, 20; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der anorganisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **v. Cordier:** Ausgewählte Kapitel aus der Stereochemie, 1. — **Kremann:** Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie I, 2. — **v. Hemmelmayr:** Enzyklopädie der technischen Chemie, 2. — **Fuhrmann:** Photographie: Negativ- und Positivprozeß in Theorie und Praxis, einschließlich Apparatenkunde, 1. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra und Analysis und Analytische Geometrie, 6, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Weitzenböck:** Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 1. — **v. Peithner:** Mathematik II: a) Geometrie, b) Integralrechnung, c) Differentialgleichungen, 4, Übungen (mit Weitzenböck), 2. — **Schüssler:** Darstellende Geometrie, 5, Repetitorium, 2, Übungen, 6, Seminarübungen, 2; Projektive Geometrie I, 3, Übungen, 3; Die Durchdringung von Flächen zweiten Grades, 2, Konstruktionsübungen, 2. — **Wittenbauer:** Allgemeine Mechanik, einschließlich der Elemente der graphischen Statik I, 4, Übungen, 3 und 2; Die Mechanik auf Grund der Vektorenrechnung, 2; Technische Mechanik I, 4. — **Klingatsch:** Niedere Geodäsie, 4; Elemente der niederen Geodäsie, 4; Geodätische Zimmerübungen, 1½ und 2; Höhere Geodäsie, 4; Geodätisches Seminar, 6. —

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.